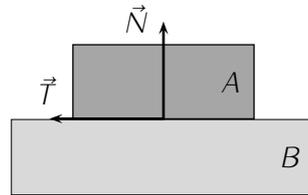


HYSTÉRÉSIS DE FROTTEMENT

Un solide granulaire est un matériau composé de particules solides discrètes de taille typique comprise entre 100 et 3 000 μm , et qui restent le plus souvent en contact les unes avec les autres. Cette classe de matériaux comprend les ciments, les sables, les graviers, les granulats, les céréales... On s'intéresse dans ce problème à un aspect statique de la physique de ces systèmes qui restent encore assez mal compris.

Formulaire



L'action du solide B sur le solide A en contact se décompose en une composante normale \vec{N} et une composante tangentielle \vec{T} vérifiant :

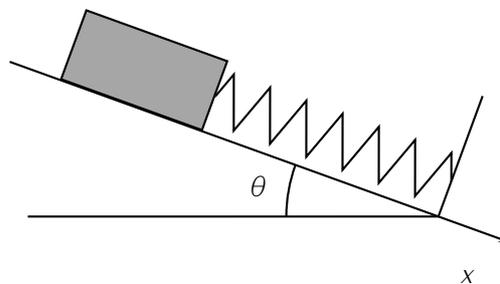
$$\begin{cases} |\vec{T}| \leq \mu_s |\vec{N}| & \text{en l'absence de glissement entre } A \text{ et } B \\ |\vec{T}| = \mu_d |\vec{N}| & \text{lorsqu'il y a glissement de } A \text{ sur } B. \end{cases}$$

μ_s et μ_d sont appelés coefficients de frottement respectivement statique et dynamique et vérifient l'inégalité : $\mu_d < \mu_s$.

0.1 Hystérésis de frottement

Une des difficultés conceptuelles majeures pour la description d'un système comportant du frottement solide est l'impossibilité de prévoir les positions d'équilibre et le bilan des forces à moins de connaître de façon détaillée l'histoire de la mise en équilibre. Le but de cette partie est d'illustrer ce phénomène (dit d'hystérésis) sur un exemple simple.

Une brique parallélépipédique de poids P est en contact avec une paroi solide inclinée d'un angle θ par rapport au plan horizontal et est reliée à un ressort de raideur k (figure ci-dessous). Soit μ_s , le coefficient de frottement statique ; on supposera pour simplifier que le coefficient de frottement dynamique μ_d est nul et qu'un frottement visqueux très important permet l'arrêt du mouvement. On note x la déformation du ressort ($x = 0$ correspond à la position pour laquelle la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide détendu). On cherche à déterminer cette déformation x à l'équilibre en fonction de l'angle θ .



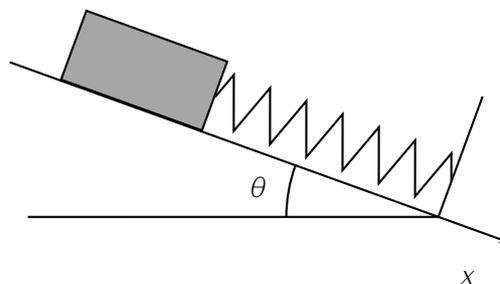
- Q1 1. Exprimer la force de rappel du ressort en fonction de k , x et \vec{e}_x le vecteur unitaire selon l'axe x . Vérifier explicitement le signe de cette force.
- Q2 2. On suppose pour le moment que la masse est immobile et que $\theta = 0$. À l'aide d'un bilan des forces en déduire $T = |\vec{T}|$ et $N = |\vec{N}|$ en fonction de x , P et k .

- Q3 3. Quelle est la plage de valeurs possibles pour x à l'équilibre? Autrement dit quelles sont les x pour lesquelles l'inégalité $|\vec{T}| \leq \mu_s |\vec{N}|$ est effectivement vérifiée?
- Q4 4. Reprendre les deux questions précédentes pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.
- Q5 5. La masse étant immobile et le plan incliné d'un angle θ , à l'aide d'un bilan des forces exprimer $T = |\vec{T}|$ et $N = |\vec{N}|$ en fonction de x , P , k et θ . Il est extrêmement vivement conseillé de faire un schéma.
- La paroi est supposée initialement horizontale et le ressort détendu ($x_0 = 0$). On incline progressivement la paroi, l'angle θ variant de 0 à $\pi/2$; on note alors θ^+ les angles d'inclinaison croissants. On désigne par x_i^+ la série des déformations du ressort dans les positions successives de non-glissement de la brique.
- Q6 6. À partir de quel angle, noté θ_1^+ , la condition de non-glissement $|\vec{T}| \leq \mu_s |\vec{N}|$ n'est-elle plus vérifiée? (On rappelle qu'initialement le ressort est détendu.)
- Q7 7. Pour cet angle, déterminer la nouvelle valeur d'équilibre x_1^+ en fonction de θ_1^+ , P et k . (On rappelle que $\mu_d = 0$, la masse est uniquement soumise au poids, à la force du ressort et à la partie normale de la réaction.)
- Q8 8. On augmente l'angle d'inclinaison; un nouveau glissement apparaît pour l'angle θ_2^+ . En utilisant la même méthode que précédemment, établir la relation entre θ_1^+ , θ_2^+ et μ_s .
On pourra commencer par établir la relation entre x_1^+ , θ_2^+ et μ_s puis remplacer x_1^+ par son expression en fonction de θ_1^+ .
- Q9 9. Montrer en s'inspirant des questions précédentes que pour chaque x_i^+ il existe un intervalle $[\theta_i^+, \theta_{i+1}^+]$ de non-glissement; on établira la relation de récurrence liant θ_i^+ et θ_{i+1}^+ . Vers quelle valeur limite tend la différence $\theta_{i+1}^+ - \theta_i^+$.
10. On effectue maintenant le parcours inverse en partant de la verticale. On note θ_i^- et x_i^- les angles successifs de glissement et les positions d'équilibre correspondantes.
- Q10 Étudier comme à la question précédente la succession des valeurs d'arrêt x_i^- .
- Q11 11. Représenter sur un même graphe du plan (θ, x) les paliers d'arrêt successifs x_i^+ à inclinaison croissante puis x_i^- à inclinaison décroissante; on pourra utiliser le fait que les points (θ_i^+, x_i^+) , (θ_i^-, x_i^-) , $(\theta_{i+1}^+, x_{i+1}^+)$ et $(\theta_{i+1}^-, x_{i+1}^-)$ se situent sur des courbes simples. On prendra $P/k = 0,1$ m et $\mu_s = 0,3$. Commenter le résultat.

HYSTÉRÉSIS DE FROTTEMENT

D'après X99 MP, avec des questions intermédiaires en plus.

0.2 Hystérésis de frottement



- Q12 1. $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$. Vérification du signe : si $x > 0$, le ressort est comprimé, on s'attend donc à ce qu'il repousse la masse, c'est-à-dire que la force soit selon $-\vec{e}_x$. Or si $x > 0$, alors $-kx\vec{e}_x$ est effectivement selon $-\vec{e}_x$, ce qui est cohérent.

2. Système : la masse; Référentiel : terrestre (galiléen pour ce type d'étude); Bilan des efforts : Poids, force du ressort et réaction normale et tangentielle. On définit l'axe y orthogonal à x de façon à ce que le repère soit orthonormé direct.

Principe fondamental de la statique : $\vec{T} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = \vec{0}$

- Q13 Par projection selon Ox , $-kx + T_x = 0$ et selon Oy $-P + N = 0$. On en déduit $T = |kx| = k|x|$ et $N = P$.

- Q14 3. $T \mu_s N \Rightarrow |x| \mu_s \frac{P}{k}$. L'intervalle est donc $\left[-\mu_s \frac{P}{k}; +\mu_s \frac{P}{k}\right]$.

- Q15 4. Le bilan est le même, la projection selon Ox donne $-kx + T_x + P = 0$, la projection selon y donne $N = 0$. Or $0 T \mu_s N = 0$ d'où $T = 0$. On en déduit que la seule position pour x est $\frac{P}{k}$.

Attention, vous ne connaissez a priori pas le sens de la force \vec{T} , il ne faut pas en présupposer un, d'où T_x et non $+T$ ou $-T$. Dans tout les cas, il faut prendre la norme pour répondre à la question, d'où la valeur absolue !

5. $\vec{T} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = \vec{0}$

- Q16 Par projection selon Ox , $-kx + T_x + P \sin \theta = 0$ et selon Oy $-P \cos \theta + N = 0$. On en déduit $T = |T_x| = |kx - P \sin \theta|$ et $N = P \cos \theta$.

- Q17 6. $x = 0$ donc $T = P \sin \theta$ et $N = P \cos \theta$ d'après la question précédente. On va avoir glissement à partir de θ_1^+ tel que $T = \mu_s N$, c'est-à-dire $P \sin \theta_1^+ = \mu_s P \cos \theta_1^+$ soit $\theta_1^+ = \arctan(\mu_s)$.

- Q18 7. Selon Ox à l'équilibre, le bilan des forces donne : $-kx_1^+ + P \sin \theta_1^+ = 0$ d'où $x_1^+ = \frac{P}{k} \sin \theta_1^+$.

8. $T = |T_x| = |kx_1^+ - P \sin \theta|$ et $N = P \cos \theta$ d'après la question 5.

or d'après la question précédente, on connaît x_1^+ en fonction de θ_1^+ , on en déduit $T = P(\sin \theta - \sin \theta_1^+)$ (signe inversé à cause de la valeur absolue et parce que sinus est une fonction croissante et $\theta > \theta_1^+$ puisque l'on augmente les θ).

- Q19 Le nouveau glissement est obtenu pour θ_2^+ tel que $T = \mu_s N \Leftrightarrow P(\sin \theta_2^+ - \sin \theta_1^+) = \mu_s P \cos \theta_2^+$ soit $\sin \theta_2^+ - \sin \theta_1^+ = \mu_s \cos \theta_2^+$.

9. Supposons que la masse vienne de s'arrêter à x_i^+ pour un angle θ_i^+ , on continue à augmenter θ . D'après la question 5, $T = |T_x| = |kx_i^+ - P \sin \theta|$, or d'après un raisonnement exactement identique à celui de la question 7, $x_i^+ = \frac{P}{k} \sin \theta_i^+$, d'où $T = |P \sin \theta_i^+ - P \sin \theta| = P(\sin \theta - \sin \theta_i^+)$. Le glissement apparaît en θ_{i+1}^+ lorsque $T = \mu_s N = \mu_s P \cos \theta_{i+1}^+$ soit

$$\sin \theta_{i+1}^+ - \sin \theta_i^+ = \mu_s \cos \theta_{i+1}^+$$

$\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ donc $\cos \theta_{i+1}^+ \rightarrow 0$ donc $\sin \theta_{i+1}^+ - \sin \theta_i^+ \rightarrow 0$, sinus étant bijective sur $[0; \frac{\pi}{2}]$,

- Q20 $\theta_{i+1}^+ - \theta_i^+$ tend vers 0, ce qui est cohérent avec une seule position d'équilibre possible en $\theta = \frac{\pi}{2}$ comme établi à la question 4.

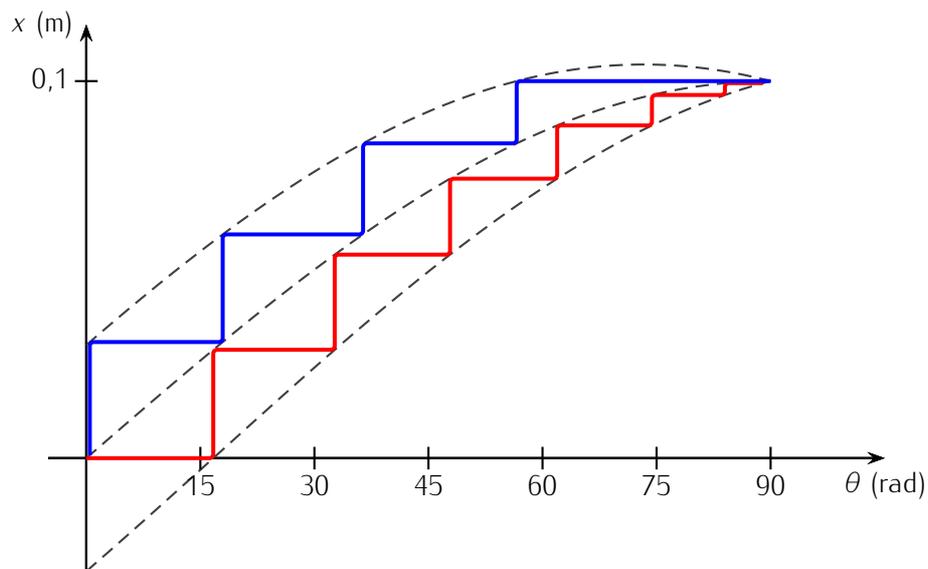
10. Les équations sont les mêmes, seul le signe de la valeur absolue change. Ainsi l'équilibre en $i+1$ se déduit de celui en $i-1$ toujours par l'égalité : $|P \sin \theta_i^- - P \sin \theta_{i+1}^-| = \mu_s P \cos \theta_{i+1}^-$ mais cette fois θ décroît et

- Q21 donc $\theta_i^- > \theta_{i+1}^-$ d'où $\sin \theta_i^- - \sin \theta_{i+1}^- = \mu_s \cos \theta_{i+1}^-$ et de même que précédemment $x_i^- = \frac{P}{k} \sin \theta_i^-$.

11. $x_i^- = \frac{P}{k} \sin \theta_i^-$ et $x_i^+ = \frac{P}{k} \sin \theta_i^+$, on peut donc les placer sur la courbe d'équation $x = \frac{P}{k} \sin \theta$.

De plus $\sin \theta_i^- - \sin \theta_{i+1}^- = \mu_s \cos \theta_{i+1}^- \Rightarrow \frac{k}{P} x_i^- - \sin \theta_{i+1}^- = \mu_s \cos \theta_{i+1}^-$ d'où $x_i^- = \frac{P}{k} (\sin \theta_{i+1}^- + \mu_s \cos \theta_{i+1}^-)$, les points (x_i^-, θ_{i+1}^-) appartiennent donc à la courbe $x = \frac{P}{k} (\sin \theta + \mu_s \cos \theta)$

- Q22 De même $\sin \theta_{i+1}^+ - \sin \theta_i^+ = \mu_s \cos \theta_{i+1}^+$ d'où les points (x_i^+, θ_{i+1}^+) $x = \frac{P}{k} (\sin \theta - \mu_s \cos \theta)$



La courbe en pointillé au milieu est celle d'équation $x = P/k \sin \theta$. La courbe en zigzag en dessous représente les paliers de $[\theta_i^+, \theta_{i+1}^+]$ (palier horizontal) et le glissement de x_i^+ vers x_{i+1}^+ (palier vertical). La courbe en zigzag au dessus représente l'équivalent à la descente.

On peut remarquer que le « chemin » employé, c'est-à-dire la succession des x_i n'est pas la même dans un sens et dans l'autre. On parle alors d'hystérésis.