

ÉTUDE D'UN CRASH TEST

On s'intéresse dans ce problème à un crash-test de voiture, et l'on cherche à évaluer les forces et les accélérations mises en jeu sur le corps humain lors d'un accident.

Il existe différents types de crash-tests (frontal, latéral etc...). Pour notre étude mécanique, nous considérerons que la voiture entre en collision avec un mur infiniment rigide (ce qui permet aussi de modéliser un choc frontal entre deux voitures de gabarits comparables). On notera $\vec{v}_0$ le vecteur vitesse juste avant la collision et $v_0 = 64 \text{ km/h}$ sa norme.



FIGURE 1 – Un véhicule avant et après un crash-test

Le système étudié, supposé indéformable, sera le conducteur de masse $m = 80 \text{ kg}$. La réaction de la voiture sera modélisée par deux forces : une force verticale, notée $\vec{R}$, s'opposant au poids et une force horizontale, notée $\vec{F}$, qui résulte essentiellement de l'action de la ceinture de sécurité sur le conducteur lors du choc. On supposera que le mouvement du système est purement horizontal.

La force $\vec{F}$ est de norme inconnue, supposée constante, et on souhaite estimer la valeur de $F = \vec{F}$ à l'aide des photographies ci-dessus.

Le référentiel terrestre choisi pour cette étude a pour origine O le centre de gravité du conducteur au début de la collision. On choisira l'axe Ox horizontal dirigé et orienté comme le vecteur vitesse initial $\vec{v}_0$, l'axe Oz vertical vers le haut, et l'axe Oy perpendiculaire aux deux précédents. L'instant initial $t = 0$ correspond au début du choc : la voiture entre en contact avec le mur. On prendra pour l'intensité de la pesanteur la valeur $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

1. Faire un schéma sur lequel vous représenterez le système, les forces qu'il subit, ainsi que sa vitesse initiale.
2. Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}$ en fonction des données du problème et des vecteurs de la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
3. En déduire l'expression de $v_x(t)$, la projection de la vitesse selon x en fonction du temps.
4. Déterminer l'expression de $x(t)$.
5. Déduire des questions précédentes le temps τ nécessaire au système pour s'arrêter complètement, en fonction des données du problème $v_0, F, m, \dots$.
6. Exprimer alors la distance d'arrêt d que le système parcourt lors du choc.
7. La voiture représentée sur la photographie figure 1 page 1 a pour dimensions, d'après son constructeur : 3,58 m de long, 1,63 m de large et 1,49 m de haut. Estimer la valeur numérique de d à l'aide des photographies. Expliquer en détail la démarche suivie.
8. Déduire des questions précédentes l'expression de F en fonction de m, v_0 et d . Faire l'application numérique. Quelle serait la masse¹ dont le poids aurait la même intensité que $\vec{F}$?

1. Les intensités de forces sont parfois données en "kg", ce qui n'est bien entendu pas une unité de force, mais représente la masse qui, posée sur l'objet, exercerait une force de même intensité.

9. Déterminer l'accélération subie par le conducteur lors du choc. Comparer avec le record d'accélération auquel s'est volontairement soumis le médecin John Stapp² : 453 m/s^2 .

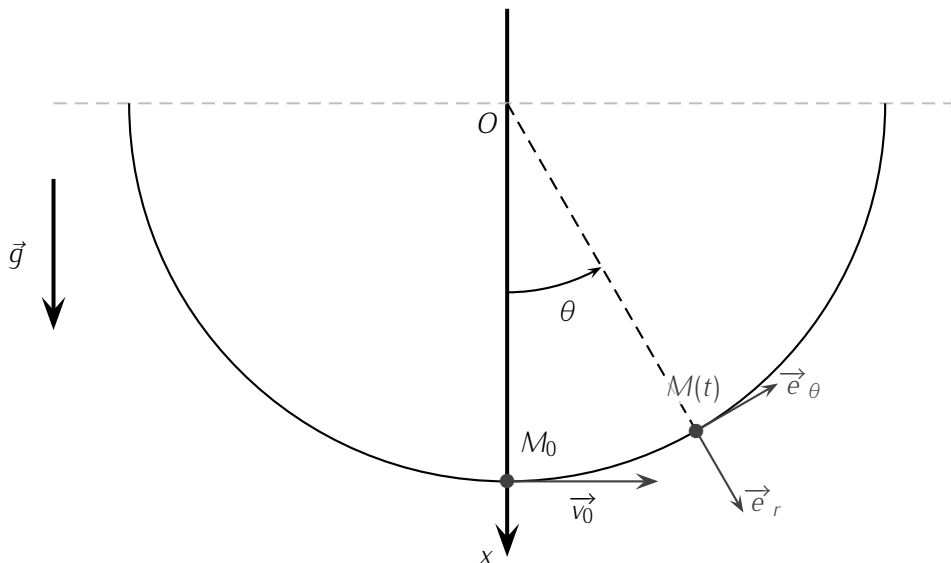
Question d'interprétation

10. Dans l'intérêt des passagers, a-t-on intérêt à rendre les voitures plus solides (moins déformables) ? Justifier votre réponse à l'aide des résultats précédents.

2. Ce médecin s'intéressait aux conséquences pour le corps humain d'une violente accélération lors de l'éjection d'un pilote de chasse depuis un avion supersonique. Il s'est volontairement infligé de violentes accélérations dans différentes positions afin de déterminer comment protéger au mieux les pilotes. Ces expériences n'ont pas été sans conséquences puisque son corps a subi un certain nombre de lésions.

MOUVEMENT PENDULAIRE AMORTI

Un petit objet assimilé à un point matériel M , de masse m , peut glisser sans frottement le long d'un rail ayant la forme d'un demi-cercle de centre O et de rayon R , placé dans un plan vertical.



On repère la position du point M à l'instant t par l'angle $\theta(t) = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM(t)})$.

À l'instant $t = 0$, l'objet est lancé du point M_0 avec une vitesse $\vec{v}_0$.

Dans tout le problème, on utilisera une base de projection polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. On prendra pour valeur de l'accélération de la pesanteur $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

- Q1 1. Faire l'inventaire des forces appliquées à M , et les représenter sur un schéma clair lorsque le point est dans une position $M(t)$ quelconque. On précisera les composantes de ces forces sur la base polaire.
- Q2 2. Exprimer l'accélération de M dans la base polaire. Justifier.
- Q3 3. En déduire l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $\theta(t)$.
- Q4 4. On suppose que la norme v_0 du vecteur vitesse initial est suffisamment faible pour que la condition $\theta(t) \ll 1 \text{ rad}$ soit satisfaite à chaque instant. Déterminer complètement l'expression de $\theta(t)$ dans cette hypothèse en fonction de v_0 , g , R et t .

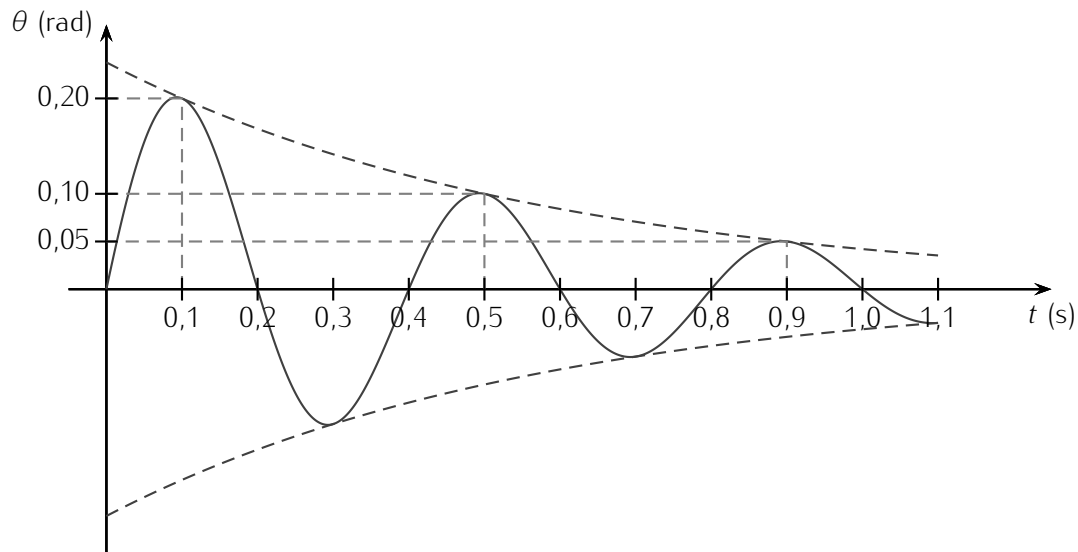
On suppose à partir de maintenant que le point M subit au cours de son mouvement une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$, où λ est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse du point M à l'instant t . La condition $\theta(t) \ll 1 \text{ rad}$ reste également satisfaite à chaque instant.

- Q5 5. Établir la nouvelle équation différentielle satisfaite par la fonction $\theta(t)$.
- Q6 6. Les grandeurs m , g et R étant fixées, donner la condition portant sur λ pour que le mouvement soit pseudo-périodique.
- Q7 7. Cette condition étant réalisée, exprimer $\theta(t)$ sous la forme :

$$\theta(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sin(\Omega t)$$

On justifiera soigneusement l'établissement de cette relation et on exprimera A , τ et Ω en fonction de v_0 , m , g , R et λ .

8. L'allure de la courbe représentative des variations de la fonction $\theta(t)$ est donnée ci-dessous.



On appelle décrément logarithmique la grandeur sans dimension

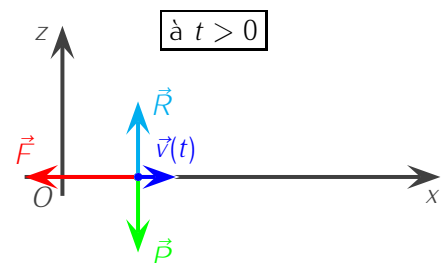
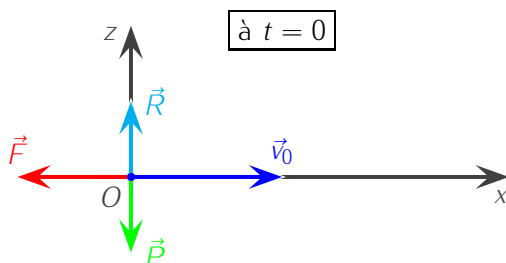
$$\delta = \ln \left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} \right)$$

où T est la pseudo-période et t le temps.

- Q8 (a) Exprimer λ en fonction de δ , m et T .
 Q9 (b) Par lecture graphique, déterminer la valeur de T .
 Q10 (c) Par lecture graphique, déterminer la valeur de δ .
 Q11 (d) En déduire la valeur de λ (sans omettre de préciser son unité), sachant que $m = 100$ g.
 Q12 (e) Tracer l'allure de la trajectoire de phase correspondant à la courbe ci-dessus (on se restreindra à la même plage temporelle).

ÉTUDE D'UN CRASH-TEST

1. La force $\vec{F}$ doit être de sens opposée à la vitesse initiale.



2. D'après le principe fondamental de la dynamique, le référentiel étant galiléen, $\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$. D'après l'énoncé, le mouvement est purement horizontal, on en déduit que $\vec{a} = a_x \vec{e}_x$.

On en déduit par projection selon l'axe Oz que $\vec{P}$ et $\vec{R}$ se compensent.

Finalement, on a $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} = \frac{-F}{m}\vec{e}_x$.

3. $a_x = \frac{-F}{m}$, par intégration, $v_x = \frac{-F}{m}t + cte$. Or d'après les conditions initiales $v_x(t=0) = v_0$, d'où $\frac{-F}{m}0 + cte = v_0$, soit $v_x = v_0 - \frac{F}{m}t$.

4. De même $x(t) = v_0 t - \frac{F}{2m} t^2 + ct e'$ et en utilisant le fait que $x(t=0) = 0$, on trouve $x(t) = v_0 t - \frac{F}{2m} t^2$

5. Le temps τ nécessaire pour s'arrêter est solution de l'équation $v_x(\tau) = 0$, soit $v_0 - \frac{F}{m} \tau = 0$ et donc $\tau = \frac{mv_0}{F}$

Remarque : avec cette formule, il est facile de vérifier à la fois la cohérence du résultat et l'homogénéité de l'expression obtenue.

6. $d = x(t = \tau) - x(t = 0) = v_0 \tau - \frac{F}{2m} \tau^2 = \frac{mv_0^2}{2F}$

7. On observe que, lors du crash-test, l'avant de la voiture est complètement déformé jusqu'au rétroviseur environ, tandis que l'arrière de la voiture est peu déformé. On en déduit qu'au cours du choc, le conducteur a avancé d'une distance égale à la longueur du capot (c'est-à-dire de l'avant de la voiture jusqu'au rétroviseur environ).

Pour estimer cette longueur, il faut mesurer la distance correspondante sur la figure (en cm), puis trouver le facteur d'échelle entre la photo et la réalité.

On mesure la longueur de la voiture sur la photo de gauche (environ 10 cm, dépend de l'imprimante) et la longueur du capot (environ 3 cm, dépend de l'imprimante), ce qui donne une longueur pour le capot de $3 \times 3.58/10 = 1,1$ m avec ces valeurs. D'où $d = 1,1$ m.

8. $F = \frac{mv_0^2}{2d} = 11$ kN. La masse donnant la même force serait de 1,2 tonnes.

9. $a = |a_x| = \frac{F}{m} = \frac{v_0^2}{2d} = 1,4 \times 10^2$ m/s². Cette valeur est environ trois fois en-dessous du record de John Stapp. Toutefois, il faut bien avoir conscience que nous avons calculé une accélération moyenne lors du choc. Dans les faits, l'évolution temporelle de l'accélération a plutôt l'allure d'une courbe en cloche, et a prend temporairement des valeurs bien plus élevées que l'accélération moyenne calculée ici.

Un tel choc ne devrait tout de même pas engendrer de lésions irréversibles, mais est proche de la limite ; cela d'autant plus que la vitesse intervenant au carré dans la formule établie ici, des vitesses légèrement plus élevées feront subir au conducteur des forces nettement plus importantes.

10. $W = -Fd < 0$ résistant puisque la force est orientée vers la gauche alors que le mouvement se fait vers la droite (sur le schéma du corrigé).

11. Entre le début de la collision (i) et la fin de la collision (f) :

$$E_c(f) - E_c(i) = W_{i \rightarrow f} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -Fd \Rightarrow F = \frac{mv_0^2}{2d}$$

12. Il ne faut surtout pas rendre les voitures rigides/indéformables, bien au contraire : il est préférable d'augmenter au maximum la distance parcourue lors du choc. Si la voiture était très rigide, d serait très faible et F augmenterait fortement, ce qui ne serait pas favorable pour les passagers.

A l'inverse, il ne faut pas non plus que la voiture soit trop déformable sinon un problème se posera lorsque l'habitacle (qui, lui, doit être indéformable de manière à protéger les passagers) entrera en collision avec le mur/l'autre véhicule.

13. En terme de déformation, on ne peut pas tellement augmenter d sans que le conducteur entre en collision avec le mur. Pour amoindrir les forces subies par les passagers, il faudrait alors ralentir la voiture **avant** la collision. Il existe à l'heure actuelle un système qui permet de freiner automatiquement si un risque de collision à venir est établi. Ce système permet ainsi de diminuer v_0 au moment du choc, et par conséquent l'intensité de la force subie.

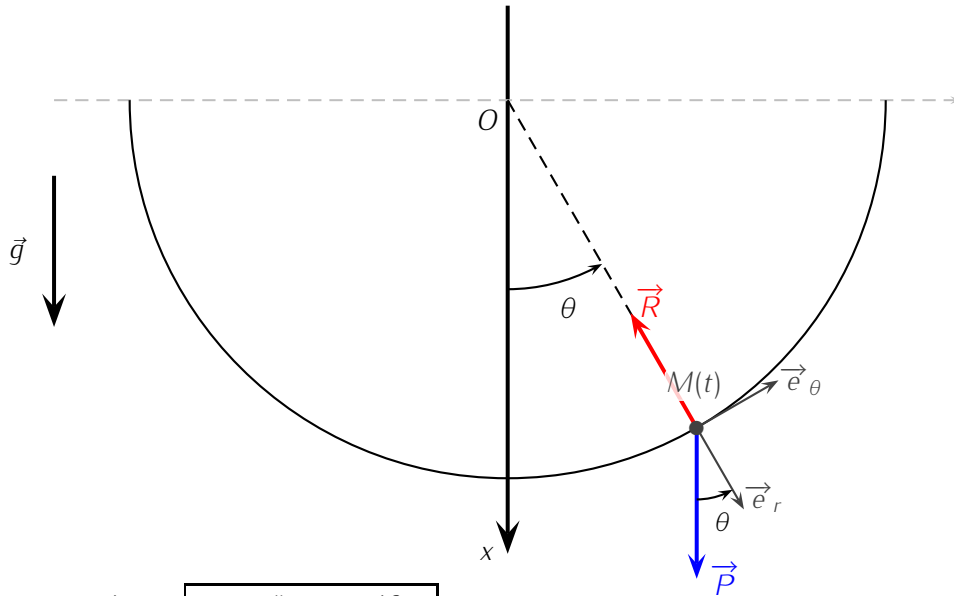
Une autre solution pourrait être de déclencher un airbag extérieur afin d'augmenter la distance de freinage d , dispositif qui impose également une détection préalable au choc. Ce système existe déjà, mais son but est plutôt, dans le cas d'une collision voiture-piéton, de protéger le piéton.

MOUVEMENT PENDULAIRE AMORTI

Q13

1. Système : point M . Référentiel : $\mathcal{R}_T$ terrestre supposé galiléen.

Forces : son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg \cos(\theta)\vec{e}_r - mg \sin(\theta)\vec{e}_\theta$; la réaction normale du support (car pas de frottements) $\vec{R} = N\vec{e}_r$.



Q14

2. $\vec{OM} = R\vec{e}_r$; $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$; $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

3. Appliquons la deuxième loi de Newton à l'objet dans $\mathcal{R}_T$: $m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P}$.

Q15

Soit en projection selon $\vec{e}_\theta$: $mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + 0$ d'où $\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0$. (Remarque, une méthode énergétique fonctionne aussi).

4. Pour des angles faibles (cad $\theta(t) \ll 1$), on fait l'approximation : $\sin \theta \simeq \theta$ d'où $\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = 0$.

Le mouvement est celui d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$, la solution est de la forme $\theta(t) = A \cos(\sqrt{\frac{g}{R}}t) + B \sin(\sqrt{\frac{g}{R}}t)$.

Q16

Or $\theta(t=0) = 0 = A$ et $\dot{\theta}(t=0) = \frac{v_0}{R} = B\sqrt{\frac{g}{R}}$ d'où $B = \frac{v_0}{\sqrt{gR}}$. D'où $\theta(t) = \frac{v_0}{\sqrt{gR}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right)$

Attention, beaucoup ont écrit $\dot{\theta}(t=0) = v_0$, mais ce n'est pas homogène ! $v = R\dot{\theta}$ d'où $v_0 = R\dot{\theta}_0$.

Q17

5. On ajoute la force de frottements $\vec{f} = -\lambda R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ dans le bilan des forces. Appliquons la deuxième loi de Newton à l'objet dans le référentiel d'étude : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}$, soit en projection selon $\vec{e}_\theta$: $m\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - \alpha R \dot{\theta}$, d'où pour $\theta \ll 1$, $\sin \theta \simeq \theta$: $m\ddot{\theta} + mg\theta + \alpha R \dot{\theta} = 0$. Soit : $\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = 0$

Q18

6. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est : $r^2 + \frac{\lambda}{m}r + \frac{g}{R} = 0$. Le régime est pseudo-périodique si le discriminant est négatif : $\Delta = \frac{\lambda^2}{m^2} - 4\frac{g}{R} < 0$. D'où $\lambda < 2m\sqrt{\frac{g}{R}}$

7. Les racines de l'équation caractéristique sont de la forme : $r_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\lambda}{m} \pm j\sqrt{4\frac{g}{R} - \frac{\lambda^2}{m^2}} \right)$

La solution est de la forme : $\theta(t) = A \exp(-\frac{t}{\tau}) \sin(\Omega t + \varphi)$ avec $\tau = 2m/\lambda$ et $\Omega = \sqrt{\frac{g}{R} - \frac{\lambda^2}{4m^2}}$.

Q19

Comme $\theta(0) = 0$, on peut choisir $\varphi = 0$. $\dot{\theta}(0) = A\Omega = \frac{v_0}{R}$ donc $A = \frac{v_0}{R\Omega}$

