

**Conseils :**

- Ce devoir comporte 3 exercices indépendants. Lisez attentivement l'énoncé du début à la fin et choisissez **ensuite** par quel problème commencer (aucun ordre n'est imposé).
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **rédaction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).  
**Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés.** Laissez une marge à gauche pour le correcteur.
- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- L'usage des **calculatrices est autorisé**.

## ÉTUDE DU FLASH D'UN APPAREIL PHOTO

Cet exercice concerne une modélisation du fonctionnement électrique d'un flash d'appareil photo.

Le schéma électrique global est représenté figure 1. Il fait intervenir des composants que vous connaissez bien, comme une batterie, des résistances, des condensateurs, et d'autres que vous connaissez moins comme une diode, un transistor ou des transformateurs.

Le fonctionnement d'un flash électronique repose sur la génération d'un éclair lumineux dans un tube de quartz translucide, noté « flash tube », dans lequel on a placé un gaz raréfié, le xénon. Ce tube est délimité par deux électrodes reliées à un condensateur C2 chargé sous quelques centaines de volts. Lorsque le xénon est ionisé, il devient conducteur et le condensateur peut se décharger dans le gaz, créant ainsi un éclair lumineux très intense et d'une durée très brève.

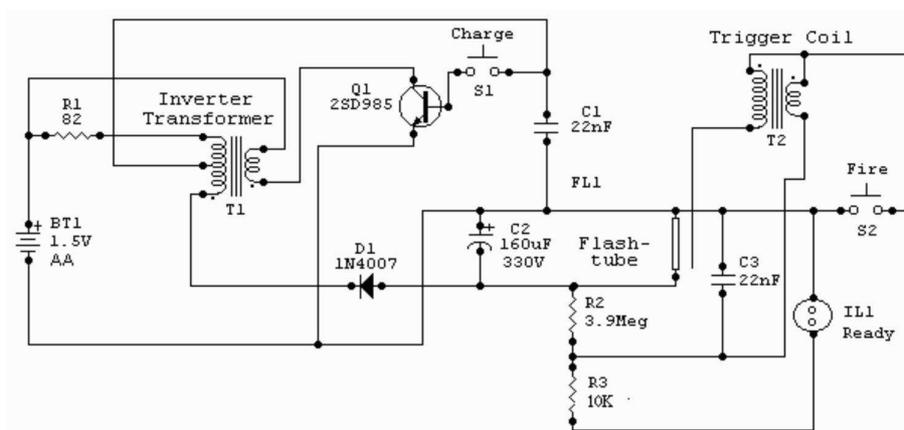
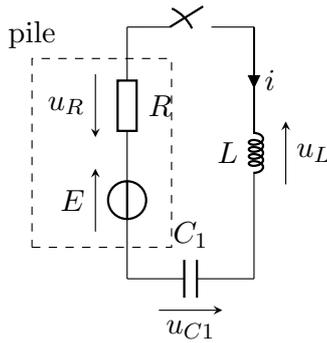


FIGURE 1 – Schéma global du circuit d'alimentation du flash d'un appareil photo

Le circuit peut être décomposé en plusieurs blocs que nous allons étudier uniquement le premier bloc. L'objectif est d'amplifier la tension fournie par une pile de 1,5V en une tension de 300V. Cela se fait par l'intermédiaire du transformateur T1, dont le fonctionnement requiert une tension sinusoïdale.

### A. Obtention d'une tension quasi-sinusoïdale à partir d'une tension continue



La production d'une tension sinusoïdale est assurée par un bloc fonctionnel équivalent à l'association série d'un condensateur de capacité  $C_1 = 25 \text{ nF}$  et d'une bobine d'inductance  $L = 36 \text{ mH}$ , alimentée par une pile de f.é.m.  $E = 1,5 \text{ V}$  constante et de résistance interne  $R$ . La bobine modélise en fait le primaire d'un transformateur, ce qui ne change rien à l'étude.

À l'instant initial  $t = 0$  où le flash doit se déclencher, le condensateur est déchargé ( $u_{C1}(0) = 0$ ) et l'interrupteur est actionné afin de fermer le circuit.

- Q1 1. Donner sans calcul mais en justifiant la valeur de la tension  $u_R$  aux bornes de la résistance juste après la fermeture de l'interrupteur. En déduire la valeur de la tension  $u_L$  aux bornes de la bobine à ce même instant.
- Q2 2. Montrer que la tension  $u_L$  vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2 u_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_L}{dt} + \frac{1}{LC_1} u_L = 0. \quad (1)$$

Astuce : on pourra écrire la loi des mailles et la dériver deux fois, terme à terme, par rapport au temps.

- Q3 3. Écrire cette équation sous forme canonique et définir la pulsation propre  $\omega_0$  et le facteur de qualité  $Q$  des oscillations.
- Q4 4. Démontrer que la tension  $u_L$  présente des oscillations seulement si la résistance interne de la pile est telle que

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C_1}}. \quad (2)$$

On suppose par la suite que  $R$  vérifie cette condition.

- Q5 5. Exprimer en fonction des données de l'énoncé la pseudo-pulsation notée  $\omega$  et la durée caractéristique  $\tau$  du régime transitoire.
- Q6 6. Écrire l'expression des solutions de l'équation différentielle déterminée à la question 2 en faisant intervenir deux constantes  $A$  et  $B$  qu'on ne cherchera pas à déterminer. Quelle est la dimension de ces deux constantes ?
- Q7 7. Justifier la condition initiale juste après fermeture de l'interrupteur

$$\frac{du_L}{dt}(0) = -\frac{RE}{L} \quad (3)$$

- Q8 8. En vous appuyant sur les deux conditions initiales, dessiner qualitativement l'allure de la tension  $u_L(t)$ . Vous ferez apparaître sur la figure la pseudo-période  $T$  des oscillations et le temps d'amortissement  $\tau$ .
- Q9 9. Pour le fonctionnement du flash, les oscillations de  $u_L$  sont considérées de qualité suffisante lorsque leur amortissement au bout de cinq pseudo-périodes est de moins de 10%. En faisant l'approximation que  $\omega \simeq \omega_0$  si l'amortissement est faible, déterminer la valeur maximale de la résistance interne de la pile permettant de vérifier ce critère. Justifier par un ordre de grandeur qu'il est réalisable.

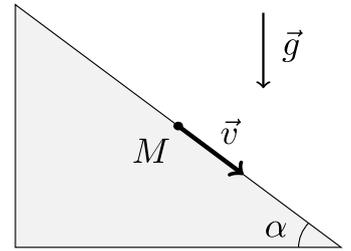
# LA LUGE : UN SPORT OLYMPIQUE

La luge est devenue un sport olympique en 1964 à Innsbruck (Autriche). Le lugeur est allongé, sur le dos et les pieds en avant, sur la luge qui glisse sur une piste de glace. Pour freiner, le lugeur ne peut compter que sur ses pieds car la luge ne comporte pas de frein. Les spécialistes peuvent atteindre des vitesses supérieures à 100 km/h.

Pour la modélisation, on assimile l'ensemble { luge + lugeur } (désigné par la suite sous le terme simple de luge) à un point matériel  $M$  de masse  $m = 100$  kg. La piste est considérée comme un référentiel galiléen. L'accélération de la pesanteur est prise égale à  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .

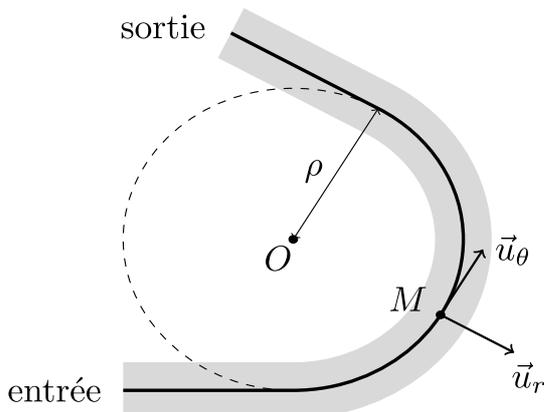
## A. Descente rectiligne

Après la phase de poussée, la luge atteint une vitesse  $v_0 = 5,0$  m/s. Elle descend ensuite une piste rectiligne de pente constante, inclinée de 10% (on descend verticalement de 10 m quand on avance horizontalement de 100 m). On appelle  $\alpha$  l'angle que fait la piste avec l'horizontale. Les frottements sont négligés devant les autres forces en jeu. Le point  $M$  est ainsi en mouvement rectiligne uniformément accéléré.

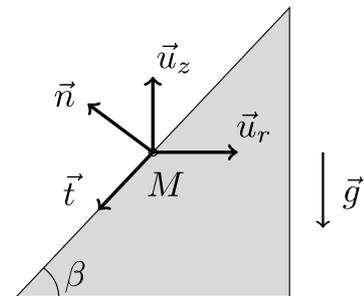


- Q10 1. Effectuer le bilan des forces qui s'exercent sur la luge et dessiner un schéma représentant ces forces, en justifiant soigneusement leur direction et leur sens.
- Q11 2. Par application de la relation fondamentale de la dynamique, exprimer et calculer numériquement l'accélération  $a$  de la luge en fonction de l'accélération de la pesanteur  $g$  et de l'angle  $\alpha$ .
- Q12 3. L'origine des temps est fixée juste après la phase de poussée. Donner l'expression de la vitesse en fonction du temps. Au bout de quelle durée  $t_a$  la luge atteint-elle la vitesse  $v_a = 25$  m/s? Donnez l'expression analytique du résultat et faites l'application numérique.
- Q13 4. Quelle est la distance parcourue lorsque la luge atteint la vitesse  $v_a$ ? Donnez l'expression analytique du résultat et faites l'application numérique.

## B. Virage circulaire



Vue de dessus de la piste



Vue en coupe de la piste

À présent, le point  $M$  est en mouvement circulaire uniforme à la vitesse  $V$ , sur un cercle de rayon  $\rho$ . La piste est inclinée latéralement d'un angle  $\beta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . La trajectoire se situe dans un plan horizontal donc la vitesse est :  $\vec{v} = V\vec{u}_\theta$ .

Le trièdre de vecteur unitaires  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  est orthonormé direct.

On désigne par  $\vec{R} = R_N \vec{n} + R_T \vec{t}$  la réaction de la piste, qui n'est plus uniquement normale. Les vecteurs unitaires  $\vec{n}$  (normal) et  $\vec{t}$  (tangente) sont définis sur la figure de droite ci-dessus.

- Q14 5. Refaire le schéma vue de dessus et représenter la vitesse et l'accélération. Exprimer l'accélération  $\vec{a}$  en fonction de  $V$ ,  $\rho$  et de  $\vec{u}_r$ . Justifier physiquement le sens de l'accélération.
- Q15 6. La luge n'étant soumise qu'à son poids et à la réaction du support, écrire la relation fondamentale de la dynamique en projection dans le repère  $(\vec{t}, \vec{n})$ . On représentera les forces sur un schéma de la vue en coupe de la piste.
- Q16 7. En déduire les expressions des réactions  $R_N$  et  $R_T$  en fonction de  $V$ ,  $\rho$ ,  $\beta$ ,  $g$ , et  $m$ .
- Q17 8. Quelle est la valeur  $V_c$  de la vitesse pour laquelle la réaction tangentielle est nulle ? Écrire alors  $R_T$  en fonction de  $m$ ,  $\rho$ ,  $\beta$  et  $(V^2 - V_c^2)$ .

*Les questions suivantes sont un peu plus délicates et devront être abordées lorsque l'ensemble du DS aura été cherché.*

Soit  $f = 0,3$  le coefficient de frottement latéral de la luge sur la piste de glace. Les lois du frottement solide indiquent que la luge ne dérape pas tant que  $|R_T| < f|R_N|$ . Dans la suite des questions, on ne considère que le cas  $V \geq V_c$  ce qui correspond à un dérapage possible vers l'extérieur du virage.

- Q18 9. Montrer que  $V$  doit respecter l'inégalité suivante pour éviter le dérapage :

$$V^2(\cos \beta - f \sin \beta) \leq g\rho(\sin \beta + f \cos \beta)$$

- Q19 10. En déduire que si l'inclinaison  $\beta$  est suffisante, il n'y aura jamais dérapage quelle que soit la vitesse  $V$ . Donner l'inclinaison minimale à respecter, qui dépend uniquement du coefficient  $f$ . Faire l'application numérique de façon approchée, et convertir le résultat en degrés.
- Q20 11. Si cette inclinaison minimale n'est pas respectée, montrer que la condition de non dérapage impose une vitesse  $V$  à ne pas dépasser, à exprimer en fonction de  $g, \rho, \beta$  et  $f$ . Que risque la luge si sa vitesse est trop grande ?
- Q21 12. Montrer à partir des résultats précédents qu'en l'absence de frottement latéral, on ne pourrait aborder le virage qu'à la vitesse  $V_c$ . Les frottements permettent ainsi d'avoir une certaine marge de vitesse dans un virage.

## À PROPOS DES ARAIGNÉES

Les araignées ou Aranéides sont des prédateurs invertébrés arthropodes. À ce jour, plus de 47000 espèces subdivisées en 117 familles sont répertoriées et 1700 d'entre elles vivent en France. Les araignées produisent des fils de soie constitués d'un entrelacement de nombreuses fibrilles élémentaires. Le diamètre de ces fils varient typiquement de 1 jusqu'à 70  $\mu\text{m}$ . À diamètre équivalent, ces fils sont plus résistants que l'acier et possèdent de nombreuses autres propriétés qui les rendent intéressants pour l'industrie, pour la confection par exemple de nouveaux textiles, de gilets pare-balles ou encore de cordes d'instruments de musique. Dans la nature, l'usage que les araignées en font est multiple et dépend des espèces considérées : fil de sécurité pendant un saut pour fuir ou pour se déplacer (fil d'Ariane), tissage de toile pour piéger des proies, moyen de s'élever dans les airs et de voyager au gré des courants aériens pour les araignées montgolfières (fil de la Vierge), confection de catapultes pour la chasse, création de dômes pour le stockage d'air sous l'eau douce pour les espèces subaquatiques ...

L'élongation relative d'un fil de soie de longueur initiale  $\ell_0$  de rayon  $a$  et donc de section  $S_0 = \pi a^2$  soumis à une force de traction d'intensité  $F$  est donnée, dans le régime des faibles élongations, par la loi de Hooke :

$$\frac{\delta \ell}{\ell_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S_0} \quad \text{où } E \text{ est le module de Young du matériau constituant le fil.}$$

- Q22 1. Quelle est la dimension de  $E$  ?
- Q23 2. Rappeler l'expression de la force  $\vec{F}$  exercée par un ressort.
3. Montrer que, dans le régime des faibles élongations, le comportement mécanique du fil peut être assimilé à celui d'un ressort de constante de raideur  $k$  que l'on exprimera en fonction des données du problème.
- Q24

Pour mesurer le module de Young d'un fil d'araignée, on procède à une expérience simple. Le fil de longueur  $\ell_0$  est attaché en deux points fixes  $A$  et  $B$  distants de  $\ell_0$  et situés sur une même horizontale. Une masse  $m$  est suspendue au point  $C$  milieu du fil. Sous l'effet du poids de cette masse, le fil adopte à l'équilibre une forme en V, dans laquelle les deux segments formant le fil ont la même longueur  $\ell$ .

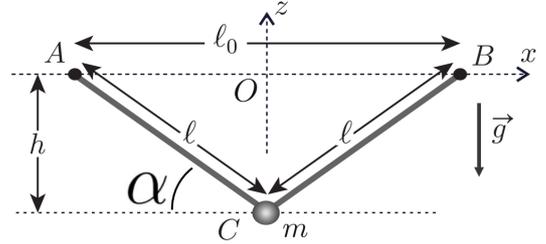


FIGURE 1 – Extension d'un fil.

On mesure alors la hauteur  $h$  dont le milieu du fil s'est déplacé par rapport à l'horizontale. Cette configuration d'équilibre est représentée sur la figure 1. On note  $\alpha$  l'angle entre le fil d'araignée et l'horizontal.

- Q25 4. Montrer que l'équilibre mécanique impose

$$2 \times k_1 \left( \ell - \frac{\ell_0}{2} \right) \sin \alpha = mg$$

avec  $k_1 = 2k$  Attention à la longueur à vide des deux fils.

- Q26 5. Exprimer la longueur  $\ell$  des fils en fonction de  $\ell_0$  et  $h$ .
6. Dans l'hypothèse où la masse  $m$  est suffisamment faible on a  $h \ll \ell_0$  et donc  $\sqrt{1 + \frac{4h^2}{\ell_0^2}} \simeq 1 + \frac{2h^2}{\ell_0^2}$ .
- Q27 De plus,  $\alpha \ll 1$  et  $\sin \alpha \simeq \tan \alpha = \frac{2h}{\ell_0}$ . En déduire que

$$h^3 = \frac{mg\ell_0^2}{8k} = \frac{mg\ell_0^3}{8ES_0}$$

La figure 2 ci-dessous reproduit les résultats de cette expérience réalisée avec un fil de longueur  $\ell_0 = 5$  cm de rayon  $a = 5 \mu\text{m}$  et différentes masses  $m$  suspendues.

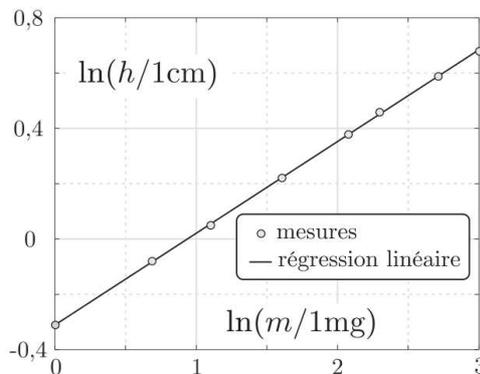


FIGURE 2 – Mesures de  $h(m)$ .

- Q28 7. Vérifier que la loi obtenue à la question précédente est compatible avec l'expérience.
- Q29 8. Déterminer la constante de raideur  $k$  du ressort équivalent au fil ; en déduire une estimation de la valeur numérique du module de Young du fil.

L'araignée *Hyptiote cavatus*, qui possède une masse d'environ 7 mg, utilise ses muscles pour enrouler l'un des fils afin de tendre la toile, comme on utilise son bras pour tendre la corde d'un arc.

Elle garde alors cette position jusqu'à ce qu'une proie entre en contact avec la toile. Quand elle relâche la tension, la toile subit alors une très forte accélération puis s'emmêle autour de l'insecte proie, ce qui marque le début du processus de capture.

La vitesse de l'araignée qui reste accrochée à la toile atteint alors une valeur maximale d'environ  $v_{\max} = 3 \text{ m s}^{-1}$  en ayant subi une accélération maximale prodigieuse  $a_{\max} = 800 \text{ m s}^{-2}$ .

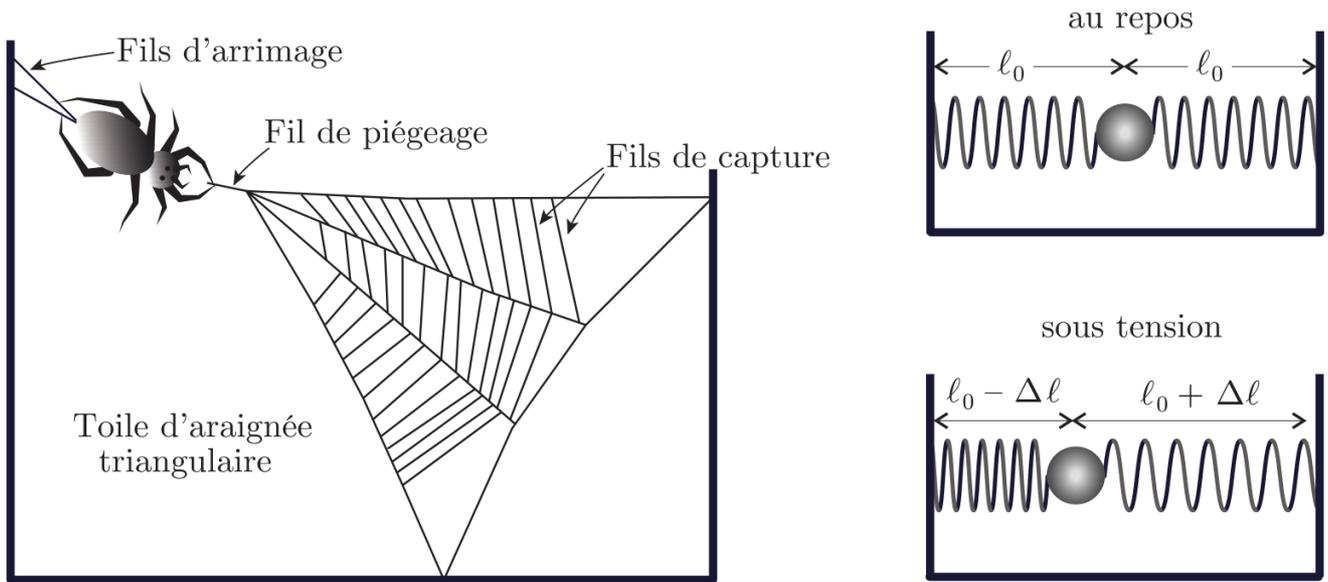


FIGURE 3 – (a) Organisation spatiale schématique de la toile triangulaire servant de piège – (b) Modèle mécanique équivalent au repos et sous tension

- Q30 9. En modélisant la toile par un simple fil de soie dont on négligera la masse devant celle de l'araignée, établir une relation liant  $a_{\max}$  et l'allongement maximum  $\Delta\ell$  du fil avant que l'araignée ne relâche la tension ainsi qu'à la raideur  $k$  des fils.
- Q31 10. On montrera, dans le chapitre 3 de mécanique, que la conservation de l'énergie implique l'égalité :  $\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = k(\Delta\ell)^2$   
 Estimer, en fonction de  $v_{\max}$ ,  $a_{\max}$  et  $m$ , l'allongement maximum  $\Delta\ell$  ainsi que la raideur  $k$ . On attend une expression littérale et une valeur numérique.

Dans les films, le super-héros SPIDERMAN, dont on estime la masse à  $m = 75 \text{ kg}$ , poursuit les voitures en se balançant sur des fils d'immeuble en immeuble.

Il attache son fil supposé inextensible, de masse négligeable et de longueur  $\ell = 25 \text{ m}$  sur un point de l'immeuble situé en face, à l'horizontale par rapport à sa position. Dans ces conditions on a donc  $\theta(t = 0) = \pi/2$ .

Il se laisse alors entraîner sans vitesse initiale. (Fig. 4).

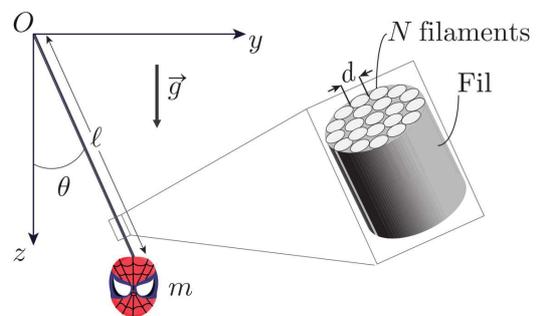


FIGURE 4 – Le vol de SPIDERMAN.

- Q32 11. Écrire les équations du mouvement de SPIDERMAN . Attention : on ne demande pas de les résoudre.

- Q33 12. En multipliant l'une des deux équations par  $\theta$  et en l'intégrant terme à terme par rapport au temps, établir la relation :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell} \cos \theta$$

- Q34 13. En déduire, en fonction de  $m$ ,  $g$  et  $\cos \theta$  uniquement, l'expression de la tension que doit supporter ce fil.

- Q35 14. Quelle est la tension maximale dans le fil ?

## ÉTUDE DU FLASH D'UN APPAREIL PHOTO

*d'après Centrale TSI 2006 et concours fac 2008*

### A. Obtention d'une tension quasi-sinusoïdale à partir d'une tension continue

1. Le courant  $i$  traversant la résistance est aussi celui qui traverse la bobine : il doit donc être continu à l'instant  $t = 0$ . À  $t = 0^-$ , le circuit est ouvert donc  $i(0^-) = 0$ , et ainsi  $i(0^+) = 0$ . On en déduit  $u_R(0^+) = R i(0^+) = 0$ .

Appliquons maintenant la loi des mailles à  $t = 0^+$ , juste après fermeture de l'interrupteur,

$$E = u_R(0^+) + u_L(0^+) + u_{C1}(0^+) = 0 + u_L(0^+) + 0 \quad (4)$$

car le condensateur est supposé déchargé à  $t = 0^-$  et la tension à ses bornes est continue. Ainsi,

$$u_L(0^+) = E.$$

*Justifiez vos affirmations, même pour  $t = 0^-$ .*

2. Établissons l'équation différentielle pour  $t > 0$ , après fermeture de l'interrupteur. D'après la loi des mailles,  $E = u_R + u_L + u_{C1}$ . Il faut exprimer  $u_R$  et  $u_{C1}$  en fonction de  $u_L$  par l'intermédiaire des lois de comportement et de l'intensité du courant  $i$ . Il faut pour cela dériver par rapport au temps cette relation,

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{du_L}{dt} + \frac{du_{C1}}{dt} = 0. \quad (5)$$

D'après les lois de comportement,  $R \frac{di}{dt} + \frac{du_L}{dt} + \frac{i}{C_1} = 0$ .

Enfin, d'après la loi de comportement de la bobine,  $u_L = L \frac{di}{dt}$  soit  $\frac{di}{dt} = \frac{u_L}{L}$ .

Pour faire apparaître  $u_L$  dans la relation, il est nécessaire de la dériver à nouveau, soit

$$R \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{1}{C_1} \frac{di}{dt} = 0 \quad (6)$$

ce qui conduit enfin à  $\frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_L}{dt} + \frac{1}{LC_1} u_L = 0$ .

*Il est possible d'utiliser la notation  $\int$  pour parler de primitive en écrivant  $i = \frac{1}{L} \int u_L$ .  
Toutefois je n'aime pas cette notation (qui cache des constantes).*

*Attention,  $u_L$  demandé et non  $u_C$ . La relation  $i = C \frac{du}{dt}$  est valable pour  $u_C$  mais pas pour  $u_L$ .*

3. Par identification avec la forme canonique d'une équation différentielle du second ordre,  $\frac{d^2u_L}{dt^2} +$

$\frac{\omega_0}{Q} \frac{du_L}{dt} + \omega_0^2 u_L = 0$ , on déduit  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$  et  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC_1}$  soit  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}$  et  $Q = \frac{L\omega_0}{R} \Rightarrow$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C_1}}.$$

4. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle obtenue s'écrit

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0. \quad (7)$$

Les solutions de l'équation différentielle présentent un comportement oscillant si les racines de l'équation caractéristique sont complexes, c'est-à-dire si son discriminant  $\Delta$  est strictement négatif,

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 < 0 \quad \text{soit} \quad \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) < 0 \quad (8)$$

Q4

Le discriminant est du signe du second terme du produit. Ce second terme est négatif pour des valeurs élevées du facteur de qualité, précisément pour

$$Q > \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C_1}} > \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{R < 2\sqrt{\frac{L}{C_1}}}. \quad (9)$$

5. Si le discriminant est négatif, les racines de l'équation caractéristique valent

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 \left(4 - \frac{1}{Q^2}\right)} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad (10)$$

On sait alors que la pseudo-pulsation est la partie imaginaire des racines et le taux d'amortissement  $\beta = \frac{1}{\tau}$  l'opposé de leur partie réelle,

$$\boxed{\beta = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad (11)$$

Q5

En remplaçant les paramètres caractéristiques par leurs expressions, on aboutit à

$$\boxed{\tau = \frac{2L}{R} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}\sqrt{1 - \frac{R^2C_1}{4L}} = \sqrt{\frac{1}{LC_1} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad (12)$$

Q6

6. Comme l'équation différentielle est homogène, il n'y a pas de solution particulière à chercher (en d'autres termes cette solution particulière est nulle), et ainsi

$$\boxed{u_L(t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad (13)$$

où  $A$  et  $B$  sont deux constantes **homogènes à une tension**.

7. D'après la loi des mailles, pour tout  $t > 0$  (interrupteur fermé),  $E = u_R + u_L + u_{C_1}$ . Ainsi, pour tout  $t > 0$ ,  $\frac{du_L}{dt} = -\frac{du_R}{dt} - \frac{du_{C_1}}{dt} = -R\frac{di}{dt} - \frac{i}{C_1}$ .

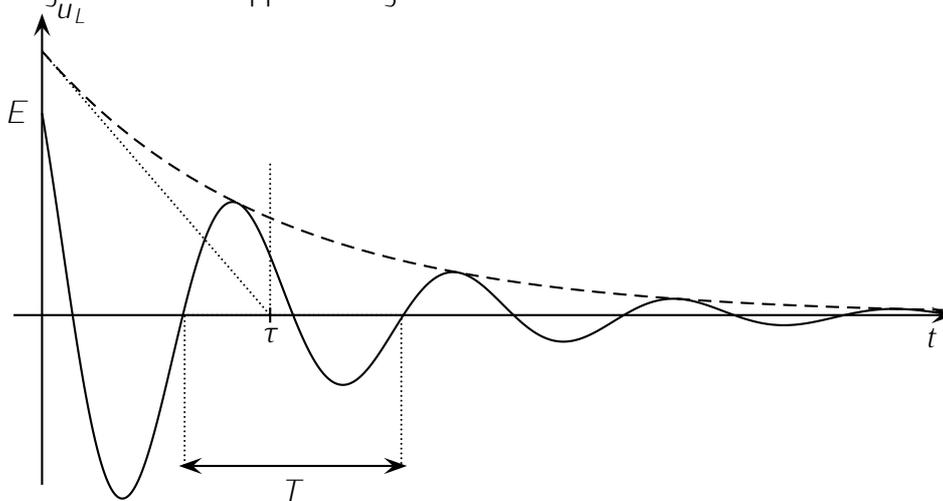
Or la dérivée de l'intensité est directement reliée à la tension aux bornes de la bobine, donc  $\frac{du_L}{dt} = -\frac{R}{L}u_L - \frac{i}{C_1}$ .. Cette relation est vraie pour tout  $t > 0$ , et demeure donc vraie dans la limite où  $t$  tend vers zéro en restant positif. On en déduit  $\frac{du_L}{dt}(0^+) = -\frac{R}{L}u_L(0^+) - \frac{i(0^+)}{C_1}$ .. Les résultats des premières questions donnent alors

Q7

$$\boxed{\frac{du_L}{dt}(0^+) = -\frac{RE}{L}}. \quad (14)$$

Q8

8. la courbe tend donc vers 0 de façon exponentielle. L'enveloppe ne touche pas la courbe en  $t = 0$  à cause de la tangente à l'origine qui est non nulle et négative.  $\tau$  peut se trouver en regardant la tangente à l'enveloppe à l'origine. Celle-ci croise l'axe des abscisses à  $t = \tau$ .



9. L'amplitude instantanée des oscillations est proportionnelle à  $e^{-t/\tau}$ . Par ailleurs, si l'amplitude décroît lentement, c'est que l'amortissement est faible et on peut faire l'approximation  $T \simeq T_0$  comme suggéré par l'énoncé. La valeur maximale autorisée du taux d'amortissement des oscillations est celle pour laquelle  $\exp(-\beta_{\max} \times 5T_0) = 0,9 \exp(-\beta_{\max} \times 0) = 0,9$ . Ainsi, en prenant le logarithme,  $-5 T_0 \beta_{\max} = \ln 0,9$ . Remplaçons maintenant  $T_0$  et  $\beta$  par leurs expressions,  $-5 \sqrt{LC_1} \frac{R_{\max}}{2L} = \ln 0,9$ , pour obtenir finalement la valeur maximale de la résistance,

Q9

$$R_{\max} = -\frac{2}{5} \sqrt{\frac{L}{C_1}} \ln 0,9 \simeq 50 \Omega .$$

L'ordre de grandeur de la résistance interne d'une pile est de quelques ohms, en tous cas nettement inférieure à la valeur maximale autorisée. Les oscillations obtenues sont donc de très bonne qualité.

## LA LUGE : UN SPORT OLYMPIQUE

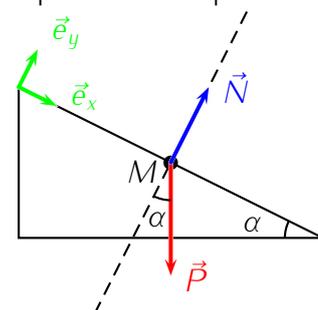
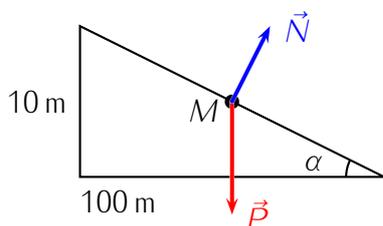
### A. Descente rectiligne

Système :  $\{M\}$  ; Référentiel : La piste (considérée comme galiléen)

Q10 1. Les forces sont :

- Le poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  orienté selon  $\vec{g}$  (vers le bas)
- La réaction du support  $\vec{R}$  qui est orthogonale au support puisque les frottements sont négligés dans cette question. De plus elle est dirigée depuis le support vers la masse (repousse la masse).

Les forces sont représentées sur le schéma ci-dessous à gauche. L'énoncé représentait un schéma avec un angle proche de  $45^\circ$ , ne faites pas comme lui pour ne pas vous tromper dans les projections.



- Q11 2. La relation fondamentale de la dynamique appliquée au système défini plus haut dans le référentiel de la piste donne  $\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$ . Il faut faire un schéma et choisir des vecteurs de bases ici. Le schéma est ci-dessus à droite.

La relation fondamentale de la dynamique projetée sur les deux axes donne :

$$\begin{cases} 0 + P \sin \alpha = m\ddot{x} \\ N - P \cos \alpha = m\ddot{y} = 0 \end{cases}$$

La deuxième relation n'est pas utile ici et toute l'accélération est selon  $x$  puisqu'il n'y a pas de mouvement selon  $y$ . On a donc  $a = \ddot{x} = \frac{P}{m} \sin \alpha \Rightarrow a = g \sin \alpha$ .

Pour l'application numérique, la valeur de  $\alpha$  n'était pas donnée directement. Ce qui était donné, c'est « la pente de la piste est de 10% », c'est-à-dire  $\tan \alpha = 0,1$  (schéma ci-dessus à gauche). On lit donc dans le tableau que l'angle correspondant et son sinus sont  $\alpha = 0,1$  et  $\sin \alpha = 0,1$ .

L'application numérique donne donc  $a = 10 \times 0,1 = 1 \text{ m/s}^2$ .

- Q12 3. Le problème est 1D ici, l'accélération étant constante on en déduit  $v = at = gt \sin \alpha + v_0$  (attention à ne pas oublier la constante liée aux conditions initiales qui vaut  $v_0$  ici).

Pour trouver  $t_a$  on utilise l'équation prise en  $t = t_a$  :  $v_a = gt_a \sin \alpha + v_0 \Rightarrow t_a = \frac{v_a - v_0}{g \sin \alpha}$ . Numéri-

quement  $t_a = \frac{25-5}{10 \times 0,1} = 20 \text{ s}$ .

**Beaucoup d'entre vous ont fait un calcul semi-analytique/semi-numérique. Ce genre de calcul est non homogène et sera pénalisé. De plus, cela ne permet pas certaines simplifications parfois (par exemple on ne se rendrait pas forcément compte que la masse n'intervient pas dans le cas d'une chute libre).**

- Q13 4. On intègre une fois de plus l'équation :  $x(t) = a \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$  (la constante d'intégration vaut ici  $x_0$ , la position de départ qui n'est pas donnée par l'énoncé. On peut la prendre égale à 0 si on prend pour origine la fin de la poussée). La distance cherchée est  $d = x(t_a) - x_0 = a \frac{t_a^2}{2} + v_0 t_a =$

$$g \sin \alpha \frac{(v_a - v_0)^2}{2g^2 \sin^2 \alpha} + v_0 \frac{v_a - v_0}{g \sin \alpha} = \frac{v_a^2 - 2v_a v_0 + v_0^2 + 2v_0 v_a - 2v_0^2}{2g \sin \alpha} \Rightarrow d = \frac{v_a^2 - v_0^2}{2g \sin \alpha} = \frac{(25-5)(25+5)}{2 \times 10 \times 0,1} = 300 \text{ m}$$

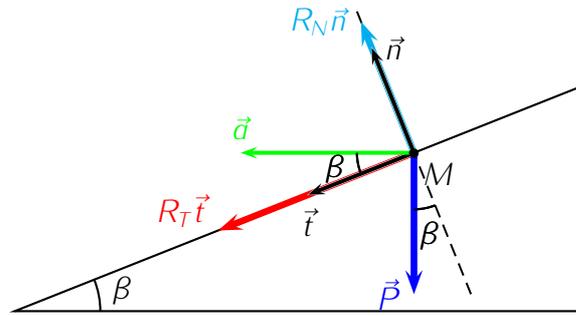
## B. Virage circulaire

- Q14 5. Sur le schéma, la vitesse est tangente à la trajectoire, selon  $\vec{u}_\theta$  et l'accélération est selon  $-\vec{u}_r$ . La vitesse en coordonnées cylindro-polaire est ici compte tenu des hypothèses  $\vec{v} = \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ . L'accélération est  $\vec{a} = -\rho \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$  or  $\dot{\theta} = \frac{v}{\rho}$  donc  $\vec{a} = -\frac{v^2}{\rho} \vec{u}_r$

**Cette expression de l'accélération en cylindro-polaire est fréquemment utilisé, il faut le savoir et savoir le redémontrer.**

Physiquement l'accélération pointe toujours vers l'intérieur des trajectoires (en tant que dérivée de la vitesse).

6. Pour appliquer la relation fondamentale il **faut** faire un beau et grand schéma



*Il est très important de repérer où l'on retrouve l'angle  $\beta$  et pour ça il est préférable de faire un dessin avec  $0 < \beta \ll \pi/4$ . Sur le schéma ci-dessus, on repère très facilement qui est  $\beta$  et qui est  $\frac{\pi}{2} - \beta$  ce qui n'est pas le cas de celui de l'énoncé.*

Q15

La relation fondamentale de la dynamique donne  $m\vec{a} = R_T\vec{t} + R_N\vec{n} + \vec{P}$ . Il faut la projeter selon  $\vec{t}$  et  $\vec{n}$ . Il faut donc ici projeter l'accélération et le poids.

$$\begin{cases} \text{Selon } \vec{t} : & m \frac{V^2}{\rho} \cos \beta = R_T + mg \sin \beta \\ \text{Selon } \vec{n} : & m \frac{V^2}{\rho} \sin \beta = R_N - mg \cos \beta \end{cases}$$

Q16

7. En inversant simplement les relations ci-dessus on obtient :

$$\begin{cases} R_T = m \frac{V^2}{\rho} \cos \beta - mg \sin \beta \\ R_N = m \frac{V^2}{\rho} \sin \beta + mg \cos \beta \end{cases}$$

Q17

8. On écrit l'équation  $R_T = 0 = m \frac{V_c^2}{\rho} \cos \beta - mg \sin \beta$  d'où  $V_c = \sqrt{\rho g \tan \beta}$

On a alors  $R_T = m \frac{V^2 - V_c^2}{\rho} \cos \beta$  en effet  $m V_c^2 \cos \beta / \rho = mg \sin \beta$

Q18

9. Pour éviter le dérapage, la condition donnée par l'énoncé est  $|R_T| < f|R_N|$ . On a  $V > V_c$  donc  $R_T > 0$ . De même  $R_N > 0$  en tant que somme de termes positifs. Cette remarque nous permet d'enlever les valeurs absolues. La condition est donc simplement  $m \frac{V^2}{\rho} \cos \beta - mg \sin \beta < f \left( m \frac{V^2}{\rho} \sin \beta + mg \cos \beta \right)$  d'où en simplifiant par  $m$ , en multipliant par  $\rho$  et en regroupant les termes faisant apparaître  $V$  :

$$V^2(\cos \beta - f \sin \beta) < g\rho(\sin \beta + f \cos \beta)$$

Ici, l'énoncé passait d'une inégalité stricte à une inégalité large. Cela ne se justifie pas (mais le cas limite n'est en général pas très intéressant en physique car inatteignable).

Q19

10.  $V^2 > 0$  et  $g\rho(\sin \beta + f \cos \beta) > 0$  donc pour que  $V^2(\cos \beta - f \sin \beta) \leq g\rho(\sin \beta + f \cos \beta)$  il « suffit » de faire en sorte que  $(\cos \beta - f \sin \beta) \leq 0$ , on aurait ainsi forcément  $V^2(\cos \beta - f \sin \beta) \leq 0 \leq g\rho(\sin \beta + f \cos \beta)$

La condition peut s'écrire plus simplement  $\frac{1}{f} \leq \tan \beta$  d'où numériquement en utilisant la table  $\tan 1,3 = 3,6 \simeq 1/0,3$ . L'angle critique vaut donc 1,3 rad soit à peu près  $75^\circ$ .

Q20

11. Si cette inclinaison minimale n'est pas respectée, alors  $(\cos \beta - f \sin \beta) > 0$  et on peut donc diviser dans l'inégalité :  $V \leq \sqrt{\rho g \frac{\sin \beta + f \cos \beta}{\cos \beta - f \sin \beta}}$  Si sa vitesse est trop grande, la luge risque de

glisser latéralement et donc de partir taper contre le mur.

Q21

12. En l'absence de frottement latéral, on a forcément  $R_T = 0$ , d'où par définition de  $V_c$ ,  $V = V_c$ . En présence de frottement on a  $-f|R_N| < R_T < f|R_N|$  d'où la présence d'une certaine marge autour de  $V_c$ .

L'énoncé ne le faisait pas calculer, mais si l'on va trop lentement par rapport à l'inclinaison du virage, on peut aussi glisser vers l'intérieur.

## À PROPOS DES ARAIGNÉES

D'après Mines-Ponts MP 2022

### 1 Propriétés mécaniques des fils d'araignée

Q22 1. Utilisons la loi de Hooke :

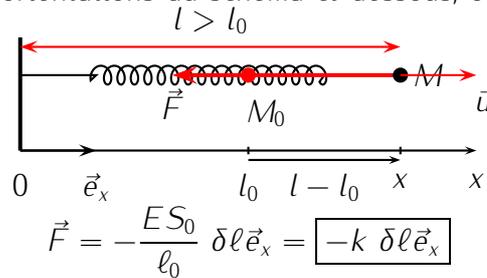
$$\frac{\delta \ell}{\ell_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S_0}$$

On en déduit :

$$[E] = \frac{[F]}{[S_0]} = \frac{M.L.T^{-2}}{L^2}$$

Ainsi  $[E] = M.L^{-1}.T^2$ , le module de YOUNG  $E$  est homogène à une force surfacique, donc à une pression, et peut s'exprimer en pascal.

Q23 2. En utilisant les notations et orientations du schéma ci-dessous, on trouve :



Q24 3. Avec  $k = \frac{ES_0}{\ell_0}$ . Le comportement du fil peut donc effectivement assimilé à un ressort.

Q25 4. Écrivons l'équilibre mécanique de la masse, au repos dans le référentiel supposé galiléen. Cette masse est soumise à son poids et à l'action des deux demi-fils. Chaque ressort associé à un demi-fil a une longueur  $\ell$ , une longueur à vide  $\ell_1 = \ell_0/2$ , et une constante de raideur  $k_1 = ES_0/\ell_1 = 2ES_0/\ell_0 = 2k$ .

Ainsi, la première loi de Newton projetée selon l'axe vertical donne :

$$2 \times k_1 \left( \ell - \frac{\ell_0}{2} \right) \sin \alpha = mg$$

Pour des angles faibles, la relation  $\tan \alpha = \frac{h}{\ell_0/2}$  donne  $\alpha = \frac{2h}{\ell_0}$ .

Q26 5. Exprimons par ailleurs l'élongation d'un demi-fil :

$$\begin{aligned} \ell - \frac{\ell_0}{2} &= \sqrt{\frac{\ell_0^2}{4} - h^2} - \frac{\ell_0}{2} \\ &= \frac{\ell_0}{2} \left( \left( 1 + \frac{h^2}{\ell_0^2/4} \right)^{1/2} - 1 \right) \\ &= \frac{\ell_0}{2} \times \frac{1}{2} \frac{h^2}{\ell_0^2/4} = \boxed{\frac{h^2}{\ell_0}} \end{aligned}$$

Q27 6. Ainsi, la première loi de Newton projeté selon l'axe vertical s'écrit donc :

$$2 \times 2k \times \frac{h^2}{\ell_0} \times \frac{2h}{\ell_0} = mg$$

$$h^3 = \frac{mg \ell_0^2}{8k} \quad (*)$$

Or  $k = \frac{ES_0}{\ell_0}$ , donc on obtient :

$$h^3 = \frac{mg \ell_0^3}{8ES_0}$$

Q28 7. On a obtenu la loi d'échelle  $h \propto m^{1/3}$ , donc  $\ln(h) = \frac{1}{3} \ln(m) + \text{cte}$ . Sur le graphe, on observe effectivement une droite pour  $\ln(h)$  en fonction de  $\ln(m)$ , dont la pente est compatible avec la valeur 1/3.

La constante de raideur équivalente du fil peut s'écrire, avec la relation (\*) de la question précédente :  $k = mg \ell_0^2 / (2h)^3$ . On utilise la figure 2 pour déterminer  $h$  à partir d'une valeur de  $m$ .

Sur la figure 2, on peut remarquer que l'ordonnée est nulle lorsque l'abscisse vaut 1, donc pour  $h = 1 \text{ cm}$ , on a  $m = e^1 mg \simeq 2.7 \text{ mg}$ , ce qui donne (avec les unités du système international) :

$$k \simeq \frac{(3 \times 10^{-3}) \times 10 \times (5 \times 10^{-2})^2}{(2 \times 10^{-2})^3} \simeq \boxed{0.2 \text{ N/m}}$$

Q29 8. Le module de YOUNG du fil d'araignée est alors donné par

$$E = \frac{k \ell_0}{\pi a^2} \simeq \frac{0.2 \times (5 \times 10^{-2})}{3 \times (5 \times 10^{-6})^2} \simeq \boxed{10^8 \text{ Pa}}$$

Q30 9. On étudie l'araignée dans un référentiel galiléen. Elle est soumise à son poids et à l'action des deux ressorts. L'énoncé n'était pas super clair ici. Compte tenu de la valeur élevée de l'accélération subie par l'araignée, il faut comprendre qu'on considère uniquement le mouvement horizontal de celle-ci. Ainsi, tout se passe comme si elle ne subissait que l'action horizontale des deux ressorts. Le ressort de gauche exerce la force  $\vec{F}_g = -k(-\Delta)\ell\vec{e}_x = +k\Delta\ell\vec{e}_x$  et celui de droite exerce la force  $\vec{F}_d = +k\Delta\ell\vec{e}_x$ . Ainsi, la seconde loi de Newton projetée selon l'axe horizontal donne :

$$ma_{\max} = 2k\Delta\ell$$

Q31 10. On a donc les deux équations :

$$\begin{cases} ma_{\max} = 2k\Delta\ell \\ \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = k(\Delta\ell)^2 \end{cases}$$

Le rapport des deux équations donne :

$$\frac{\Delta\ell}{2} = \frac{v_{\max}^2}{2a_{\max}}$$

$$\Delta\ell = \frac{v_{\max}^2}{a_{\max}} = \boxed{\frac{3^2}{800} \simeq 1 \text{ cm}}$$

Pour la constante de raideur, on a :

$$k = \frac{ma_{\max}}{2\Delta\ell} = \frac{ma_{\max}}{2v_{\max}^2/a_{\max}} = m \frac{a_{\max}^2}{2v_{\max}^2}$$

- Q32 11. On introduit une base polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  dans le plan de la figure 4 de l'énoncé. On étudie la masse  $m$  soumise à la tension  $\vec{T} = -T \vec{e}_r$  du fil et à son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ . La deuxième loi de NEWTON, dans le référentiel supposé galiléen donne :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$

$$-m\ell(\dot{\theta})^2 \vec{e}_r + m\ell\ddot{\theta} \vec{e}_\theta = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta - T \vec{e}_r$$

Projetons selon  $\vec{e}_r$  puis  $\vec{e}_\theta$ , on obtient :

$$\begin{cases} -m\ell\dot{\theta}^2 & = mg \cos \theta - T \\ m\ell\ddot{\theta} & = -mg \sin \theta \end{cases}$$

- Q33 12. L'objectif est la détermination de la tension  $T$  en fonction de  $\theta$  :

$$T = m\ell\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta$$

Pour obtenir l'expression de  $\dot{\theta}^2$ , intégrons la deuxième équation en multipliant par  $\dot{\theta}$  :

$$\dot{\theta} \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} (\sin \theta) \dot{\theta}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\theta}^2) = +\frac{g}{\ell} \frac{d}{dt} (\cos \theta)$$

$$(\dot{\theta}(t))^2 - (\dot{\theta}(t=0))^2 = \frac{2g}{\ell} (\cos(\theta(t)) - \cos(\theta = \pi/2))$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell} \cos \theta$$

- Q34 13. Reportons dans la première équation pour exprimer la tension :

$$T(\theta) = mg \cos \theta + m\ell\dot{\theta}^2$$

$$T(\theta) = 3mg \cos \theta$$

- Q35 14. La valeur maximale de la tension est donc obtenue pour  $\theta = 0$ , au point bas de la trajectoire comme on s'y attend a priori, et vaut  $T_{\max} = 3mg = 3 \times 75 \times 10 = 2 \times 10^3 \text{ N}$ .