CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON 8

Exercice 1 : *Extrait CCINP PC 2024*

1. *Initialisation :* Pour $k = 0$, l'intégrale étudiée est l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$.
La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$. On a pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^x = -e^{-x} + 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et a pour valeur $1 = 0!$.

N.B. : On pouvait aussi remarquer qu'il s'agit d'une intégrale de référence du type $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ avec $\alpha = 1 > 0$ donc convergente.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et a pour valeur $k!$.
Les fonctions $u : t \mapsto t^{k+1}$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et elles ont pour dérivées respectives $u' : t \mapsto (k+1)t^k$ et $v' : t \mapsto e^{-t}$.
De plus, $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(-t^{k+1}e^{-t}\right) = 0$ par croissances comparées (on a bien une limite finie).
Par le théorème d'intégration par parties, on en déduit que les intégrales $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{k+1}e^{-t}\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(-(k+1)t^k e^{-t}\right)\mathrm{d}t$ sont de même nature, cette dernière étant de même nature que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t$ (car $-(k+1)$ est une constante multiplicative non nulle) donc convergente par hypothèse de récurrence.
Toujours par le théorème d'intégration par parties (et par linéarité), on a alors :

$$\int_0^{+\infty} t^{k+1}e^{-t}\mathrm{d}t = [-t^{k+1}e^{-t}]_0^{+\infty} + (k+1)\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{t\to+\infty}\left(-t^{k+1}e^{-t}\right) + 0^{k+1}e^{-0} + (k+1)k! = (k+1)!$$

par hypothèse de récurrence.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t \text{ converge et a pour valeur } k!.}$$

2. Par la formule du binôme, on a pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(\frac{t}{n}\right)^\ell 1^{n-\ell} e^{-t} = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} \frac{1}{n^\ell} t^\ell e^{-t}.$$

Par la question précédente, pour tout $\ell \in [\![0, n]\!]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^\ell e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et a pour valeur $\ell!$ donc par linéarité, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}\frac{1}{n^\ell} t^\ell e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et a pour valeur $\sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}\frac{1}{n^\ell}\ell! = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{(n-\ell)!}\frac{1}{n^\ell}$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\, dt \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} = S_n.}$$

3. On réalise le changement de variable (affine donc licite) $v = t - n$.
On a $\mathrm{d}v = \mathrm{d}t$. Lorsque $t = n$ alors $v = 0$ et lorsque $t \to +\infty$ alors $v \to +\infty$.
Par le théorème de changement de variable, comme l'intégrale $\displaystyle\int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\mathrm{d}t$ converge, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v+n}{n}\right)^n e^{-(v+n)}\mathrm{d}v$ converge aussi et on a :

$$J_n = \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{n}\right)^n e^{-v}e^{-n}\mathrm{d}v.$$

Par linéarité, on a donc bien :

$$\boxed{J_n = e^{-n} \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{n}\right)^n e^{-v}\mathrm{d}v.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que l'on a montré à la question précédente que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{n}\right)^n e^{-v}e^{-n}\mathrm{d}v$ converge donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n e^{-v}\mathrm{d}v$ converge également ($2^n e^{-n}$ est une constante multiplicative non nulle).
On a pour tout $v \in [0, +\infty[$:

$$0 \leqslant 1 + \frac{v}{2n} \leqslant e^{\frac{v}{2n}} \text{ donc } \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n \leqslant e^{\frac{v}{2}} \text{ donc } 0 \leqslant \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n e^{-v} \leqslant e^{-\frac{v}{2}}$$

par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$ puis produit par $e^{-v} \geqslant 0$.
La fonction $v \mapsto e^{-\frac{v}{2}}$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$ et on a pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\int_0^x e^{-\frac{v}{2}}\mathrm{d}v = \left[-2e^{-\frac{v}{2}}\right]_0^x = -2e^{-\frac{x}{2}} + 2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2 \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{v}{2}}\mathrm{d}v$ converge et a pour valeur 2.
Les deux intégrales étant convergentes, on peut utiliser la positivité et la croissance de l'intégrale ($0 \leqslant +\infty$) ce qui donne :

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n e^{-v}\mathrm{d}v \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\frac{v}{2}}\mathrm{d}v \text{ c'est-à-dire } 0 \leqslant K_n \leqslant 2.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (K_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée.}}$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par linéarité :

$$J_n = 2^n e^{-n} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n e^{-v}\mathrm{d}v = \left(\frac{2}{e}\right)^n K_n.$$

La suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n = 0$ car $\left|\dfrac{2}{e}\right| < 1$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (J_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0.}$$

6. La fonction $u \mapsto \left(1 + \dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-u\sqrt{n}}$ est continue sur $]0, \sqrt{n}[$ et la fonction $u \mapsto 0$ est continue sur $[\sqrt{n}, +\infty[$. On en déduit que la fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[\smallsetminus\{\sqrt{n}\}$ et elle est continue à droite en $\sqrt{n}$ donc elle admet en particulier une limite finie à droite en $\sqrt{n}$.
De plus, elle admet aussi une limite finie à gauche en $\sqrt{n}$ car $\displaystyle\lim_{u\to\sqrt{n}^-} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-u\sqrt{n}} = 2^n e^{-n}$.

Ainsi, sur tout segment de $]0,+\infty[$, f_n est bien continue sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquels elle admet des limites à gauche et à droite finies (un seul point de $]0,+\infty[$ ici) donc :

$$\boxed{\text{la fonction } f_n \text{ est continue par morceaux sur }]0,+\infty[.}$$

7. Posons $t = u\sqrt{n}$ (changement de variable affine donc licite).
On a $\mathrm{d}t = \sqrt{n}\mathrm{d}u$. Lorsque $t = 0$ alors $u = 0$ et lorsque $t = n$ alors $u = \sqrt{n}$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\mathrm{d}t$ est une intégrale « ordinaire » car la fonction intégrée est continue sur le segment $[0,n]$. Par le changement de variable, on a alors :

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{u\sqrt{n}}{n}\right)^n e^{-u\sqrt{n}}\sqrt{n}\mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-u\sqrt{n}}\,\mathrm{d}u$$

par linéarité.
La fonction f_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} f_n(u)\mathrm{d}u$ converge (on intègre une fonction continue par morceaux sur un segment) et l'intégrale $\displaystyle\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} 0\mathrm{d}u$ est aussi clairement convergente. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u$ converge et on a par la relation de Chasles :

$$\int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u = \int_0^{\sqrt{n}} f_n(u)\mathrm{d}u + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-u\sqrt{n}}\,\mathrm{d}u + 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{I_n = \sqrt{n}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-u\sqrt{n}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u.}$$

8. Soit $u \in]0,\sqrt{n}[$. Le développement en série entière de $\ln(1+x)$ s'écrit :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

En particulier pour $x = \dfrac{u}{\sqrt{n}} \in]0,1[$,

$$\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}}}$$

donc

$$\ln(f_n(u)) = n\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right) - u\sqrt{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}} - u\sqrt{n}.$$

En constatant que le premier terme de la somme vaut $u\sqrt{n}$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } u \in]0,\sqrt{n}[,\ \ln(f_n(u)) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}}.}$$

9. Soit $u \in]0,\sqrt{n}[$. En constatant que le premier terme de la somme ci-dessus vaut $-\dfrac{u^2}{2}$, on obtient :

$$\left|\ln\left(f_n(u)\right) + \frac{u^2}{2}\right| = \left|\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}}\right|.$$

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $V_k = \dfrac{u^k}{kn^{\frac{k}{2}-1}} = \dfrac{n}{k}\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)^k$.

La suite $(V_k)_{k\geqslant 1}$ est positive, décroissante et de limite nulle car $0 \leqslant \dfrac{u}{\sqrt{n}} < 1$ (elle est en effet décroissante en tant que produit de deux suites décroissantes et positives et de limite nulle comme produit de deux suites de limite nulle).

Par le critère spécial des séries alternées, on en déduit que :

$$\left|\sum_{k=3}^{+\infty}(-1)^{k-1}V_k\right| \leqslant |V_3|.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } u \in]0, \sqrt{n}[, \ \left|\ln\left(f_n(u)\right) + \frac{u^2}{2}\right| \leqslant \frac{u^3}{3\sqrt{n}}.}$$

Pour $u \in]0, \sqrt{n}[$, on a $\dfrac{u}{\sqrt{n}} \leqslant 1$ donc :

$$\ln\left(f_n(u)\right) + \frac{u^2}{2} \leqslant \left|\ln\left(f_n(u)\right) + \frac{u^2}{2}\right| \leqslant \frac{u^2}{3}\frac{u}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{u^2}{3} \text{ donc } \ln\left(f_n(u)\right) \leqslant \frac{u^2}{3} - \frac{u^2}{2} = -\frac{u^2}{6}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } u \in]0, \sqrt{n}[, \ \ln\left(f_n(u)\right) \leqslant -\frac{u^2}{6}.}$$

10. Soit $u \in]0, +\infty[$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, il existe un rang n_0 (par exemple $n_0 = \lfloor u^2 \rfloor + 1$) tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u < \sqrt{n}$ et donc par la question précédente $\left|\ln\left(f_n(u)\right) + \dfrac{u^2}{2}\right| \leqslant \dfrac{u^3}{3\sqrt{n}}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u^3}{3\sqrt{n}} = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(f_n(u)\right) = -\frac{u^2}{2} \text{ d'où } \lim_{n\to+\infty} f_n(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{la suite } (f_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge simplement sur }]0, +\infty[\text{ vers la fonction } u \mapsto e^{-u^2/2}.}$$

Si $u \in]0, \sqrt{n}[$, on a par la question précédente :

$$\ln(f_n(u)) \leqslant -\frac{u^2}{6} \text{ donc } 0 \leqslant f_n(u) \leqslant e^{-\frac{u^2}{6}}$$

par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

De plus, si $u \in [\sqrt{n}, +\infty[$ alors $f_n(u) = 0$ donc on a clairement $0 \leqslant f_n(u) \leqslant e^{-\frac{u^2}{6}}$.

On a donc bien :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ pour tout } u \in]0, +\infty[, \ |f_n(u)| \leqslant e^{-u^2/6}.}$$

11. Utilisons le théorème de convergence dominée.

Posons $f : u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$ et $\varphi : u \mapsto e^{-\frac{u^2}{6}}$.

D'après les questions précédentes, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (de fonctions continues par morceaux sur $]0, +\infty[$) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction f (continue par morceaux sur $]0, +\infty[$) et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $u \in]0, +\infty[$, $|f_n(u)| \leqslant \varphi(u)$.

Il reste à montrer que la fonction φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
La fonction $u \mapsto e^{-\frac{u^2}{6}}$ est continue (par morceaux) et positive sur $[0,+\infty[$.
On a $e^{-\frac{u^2}{6}} = \underset{u\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{u^2}\right)$ par composition des limites $\lim\limits_{u\to+\infty} u^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x/6} = 0$ par croissances comparées.
Comme pour tout $u \in [1,+\infty[$, $\frac{1}{u^2} \geqslant 0$ et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$ converge (car $2 > 1$), on en déduit par comparaison que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(u)\mathrm{d}u$ converge.
Par le théorème de convergence dominée, on en déduit que f est intégrable sur $]0,+\infty[$ donc :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \text{ converge}}$$

et on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u\right) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.}$$

12. Par la question 2 et la relation de Chasles, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = I_n + J_n$.
Par la question 11 et le résultat admis, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \neq 0$ donc $\int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ donc par la question 7, $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{n}$.
On a donc en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$ et par la question 5, $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$ donc $J_n = \underset{n\to+\infty}{o}(I_n)$ d'où $S_n = I_n + \underset{n\to+\infty}{o}(I_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$.
On en déduit que :

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}.}$$

Exercice 2 : *Extrait Mines PC 2019*
I.1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{(pn)^r}{(pn)!}$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \neq 0$ et :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(pn+p)^r}{(pn+p)!} \times \frac{(pn)!}{(pn)^r} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^r \frac{1}{(pn+p)\cdots(pn+1)}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^r = 1$ et pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(pn+k) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(pn+p)\cdots(pn+1)} = 0$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$.
Par le théorème de d'Alembert pour les séries entières, on en déduit que :

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum_{n\geqslant1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n \text{ est } +\infty.}$$

On sait donc que pour tout $u \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} u^n$ converge.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la série $\sum\limits_{n\geqslant1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} x^{np} = \sum\limits_{n\geqslant1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} (x^p)^n$ converge en apliquant ce résultat en $u = x^p$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum_{n\geqslant1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{np} \text{ est } \mathrm{Sup}(\mathbb{R}_+) = +\infty.}$$

I.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$S_{0,1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^0}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n - \frac{1}{0!} x^0 = e^x - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} e^x = \frac{1}{1} x^0 e^x,$$

d'où la validité de $H_{0,1}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$S_{0,2}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)^0}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} - \frac{1}{0!} x^0 = \operatorname{ch}(x) - 1 = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} x^0 e^x,$$

d'où la validité de $H_{0,2}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ S_{0,1}(x) = e^x - 1,\ S_{0,2}(x) = \operatorname{ch}(x) - 1 \text{ et les énoncés } H_{0,1} \text{ et } H_{0,2} \text{ sont valides.}}$$

II.3. La fonction φ_x est dérivable sur $]1, +\infty[$ (par les théorèmes opératoires) et on a pour tout $t \in]1, +\infty[$:

$$\varphi_x'(t) = (1-r)t^{-r}(t-1)^r + t^{1-r} r (t-1)^{r-1} = t^{-r}(t-1)^{r-1}((1-r)(t-1) + rt) = t^{-r}(t-1)^{r-1}(t-1+r) > 0.$$

La fonction φ_x est ainsi continue (par les théorèmes opératoires car $r > 0$) et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[\varphi_x(1), \lim\limits_{t \to +\infty} \varphi_x(t)[$.
De plus, $\varphi_x(1) = -x$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi_x(t) = +\infty$ car $\varphi_x(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} t^{1-r} t^r = t$.
Comme $0 \in [-x, +\infty[$, on en déduit que :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{la fonction } \varphi_x \text{ s'annule en un unique élément de } [1, +\infty[\text{ noté } t_x \\ \text{et on a pour tout } t < t_x,\ \varphi_x(t) < 0 \text{ et pour tout } t > t_x,\ \varphi_x(t) > 0.\end{array}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_n(x) - u_{n+1}(x) = \frac{n^r}{n!} x^n - \frac{(n+1)^r}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(n+1)^{r-1}}{n!} x^n \left((n+1)^{1-r} n^r - x\right) = \underbrace{\frac{(n+1)^{r-1}}{n!} x^n}_{>0} \varphi_x(n+1).$$

Si $0 \leqslant n \leqslant \lfloor t_x \rfloor - 1$ alors $n + 1 \leqslant t_x$ donc $\varphi_x(n+1) \leqslant 0$.
Si $n \geqslant \lfloor t_x \rfloor$ alors $n + 1 \geqslant t_x$ donc $\varphi_x(n+1) \geqslant 0$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite finie } (u_n(x))_{0 \leqslant n \leqslant \lfloor t_x \rfloor} \text{ est croissante et la suite } (u_n(x))_{n \geqslant \lfloor t_x \rfloor} \text{ est décroissante.}}$$

II.4. On a pour tout $x > 0$ tel que $x + \alpha \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\varphi_x(x+\alpha) &= (x+\alpha)^{1-r}(x+\alpha-1)^r - x = x^{1-r}\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{1-r} x^r \left(1 + \frac{\alpha - 1}{x}\right)^r - x \\ &= x\left(\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{1-r}\left(1 + \frac{\alpha-1}{x}\right)^r - 1\right) = x\left(\left(1 + (1-r)\frac{\alpha}{x} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1 + r\frac{\alpha - 1}{x} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 1\right) \\ &= x\left(1 + \frac{r\alpha - r}{x} + \frac{\alpha - r\alpha}{x} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) = \alpha - r + \underset{x \to +\infty}{o}(1).\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \varphi_x(x + \alpha) = \alpha - r.}$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Utilisons ce qui précède avec $\alpha = r + \varepsilon$.

On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_x(x+r+\varepsilon) = \varepsilon > 0$ donc il existe $A_1 > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A_1$, $\varphi_x(x+r+\varepsilon) \geqslant 0$ et donc $x+r+\varepsilon \geqslant t_x$ par stricte croissante de φ_x.
Procédons de même avec $\alpha = r-\varepsilon$.
On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_x(x+r-\varepsilon) = -\varepsilon < 0$ donc il existe $A_2 > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A_2$, $\varphi_x(x+r-\varepsilon) \leqslant 0$ et donc $x+r-\varepsilon \leqslant t_x$ par stricte croissante de φ_x.
Posons $A = \max(A_1, A_2)$. On a alors pour tout $x \geqslant A$, $-\varepsilon \leqslant t_x - x - r \leqslant \varepsilon$.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} (t_x - x - r) = 0.}$$

II.5. Commençons par rappeler que $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ puisque pour tout $x > 0$, on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} \leqslant 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$ par le théorème de limite par encadrement.

Si $k = 0$ alors le résultat souhaité est évident.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $x \geqslant 1$:

$$\frac{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} = \frac{(\lfloor x \rfloor + k)^r}{(\lfloor x \rfloor + k)!} x^{\lfloor x \rfloor + k} \times \frac{(\lfloor x \rfloor)!}{(\lfloor x \rfloor)^r x^{\lfloor x \rfloor}} = \left(1 + \frac{k}{\lfloor x \rfloor}\right)^r \frac{x^k}{(\lfloor x \rfloor + k)\cdots(\lfloor x \rfloor + 1)}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{k}{\lfloor x \rfloor}\right)^r = 1$ et pour tout $p \in [\![1, k]\!]$, $\lfloor x \rfloor + p \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ donc $(\lfloor x \rfloor + k)\cdots(\lfloor x \rfloor + 1) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^k$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} = 1$.
De même, on a pour tout x tel que $\lfloor x \rfloor - k \geqslant 0$:

$$\frac{u_{\lfloor x \rfloor - k}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} = \frac{(\lfloor x \rfloor - k)^r}{(\lfloor x \rfloor - k)!} x^{\lfloor x \rfloor - k} \times \frac{(\lfloor x \rfloor)!}{(\lfloor x \rfloor)^r x^{\lfloor x \rfloor}} = \left(1 - \frac{k}{\lfloor x \rfloor}\right)^r \frac{(\lfloor x \rfloor)\cdots(\lfloor x \rfloor - k + 1)}{x^k}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{k}{\lfloor x \rfloor}\right)^r = 1$ et pour tout $p \in [\![0, k-1]\!]$, $\lfloor x \rfloor - p \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ donc $(\lfloor x \rfloor)\cdots(\lfloor x \rfloor - k + 1) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^k$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{u_{\lfloor x \rfloor - k}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} = 1$.

On a donc prouvé que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} = 1$ c'est-à-dire :

$$\boxed{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x).}$$

II.6. On a pour tout $x \geqslant m$:

$$\frac{\sum\limits_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} = \sum_{k=0}^{m} \underbrace{\frac{u_{\lfloor x \rfloor - k}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} m+1 \quad \text{par la question précédente.}$$

On en déduit qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A$, $\dfrac{\sum\limits_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} \geqslant m$ et comme $u_{\lfloor x \rfloor}(x) > 0$, on obtient que :

$$\boxed{\sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \geqslant m u_{\lfloor x \rfloor}(x) \text{ pour } x \text{ voisin de } +\infty.}$$

On a alors pour tout $x \geqslant A$:

$$u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leqslant \frac{1}{m} \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} \frac{i^r}{i!} x^i \leqslant \frac{1}{m} \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} \frac{x^r}{i!} x^i \quad \text{(car pour tout } i \in [\![\lfloor x \rfloor - m, \lfloor x \rfloor]\!],\ i \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x)$$

$$= \frac{x^r}{m} \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} \frac{x^i}{i!} \leqslant \frac{x^r}{m} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = \frac{x^r}{m} e^x \quad \text{(par ajout de termes positifs).}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour } x \text{ voisin de } +\infty,\ u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leqslant \frac{x^r e^x}{m}.}$$

II.7. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{m \to +\infty} \frac{1}{m} = 0$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{m_0} \leqslant \varepsilon$.

D'après la question 6., il existe alors $A_{m_0} > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A_{m_0}$, $0 \leqslant \frac{u_{\lfloor x \rfloor}(x)}{x^r e^x} \leqslant \frac{1}{m_0} \leqslant \varepsilon$.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{u_{\lfloor x \rfloor}(x)}{x^r e^x} = 0$.

De plus, par la question 5., on a pour tout entier relatif k, $\frac{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)}{x^r e^x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{u_{\lfloor x \rfloor}(x)}{x^r e^x}$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)}{x^r e^x} = 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout entier relatif } k,\ u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(x^r e^x).}$$

D'après la question 4., on a $\lim\limits_{x \to +\infty} (t_x - x) = r$.
Comme $r \geqslant \lfloor r \rfloor > \lfloor r \rfloor - 1$, il existe $A_1 > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A_1$, $t_x - x \geqslant \lfloor r \rfloor - 1$ et on en déduit que $t_x \geqslant x + \lfloor r \rfloor - 1 \geqslant \underbrace{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor - 1}_{\in \mathbb{Z}}$ d'où $\lfloor t_x \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor - 1$.
Comme $r < \lfloor r \rfloor + 1$, il existe $A_2 > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A_2$, $t_x - x \leqslant \lfloor r \rfloor + 1$ et on en déduit que $t_x \leqslant x + \lfloor r \rfloor + 1 \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + 2$ d'où $\lfloor t_x \rfloor \leqslant t_x \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + 2$.
En posant $A = \max(A_1, A_2)$, on en déduit que pour tout $x \geqslant A$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor - 1 \leqslant \lfloor t_x \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + 2$ et donc :

$$M_x = u_{\lfloor t_x \rfloor}(x) \leqslant u_{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor - 1}(x) + u_{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor}(x) + u_{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + 1}(x) + u_{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + 2}(x)$$

(puisque c'est un de ces termes et les autres sont positifs) d'où :

$$0 \leqslant \frac{M_x}{x^r e^x} \leqslant \underbrace{\frac{u_{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor - 1}(x)}{x^r e^x}}_{\underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\frac{u_{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor}(x)}{x^r e^x}}_{\underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\frac{u_{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + 1}(x)}{x^r e^x}}_{\underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\frac{u_{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + 2}(x)}{x^r e^x}}_{\underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

Par le théorème de limite par encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{M_x}{x^r e^x} = 0$.
Ainsi :

$$\boxed{M_x = \underset{x \to +\infty}{o}(x^r e^x).}$$

II.8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $z \neq 1$, on a :

$$D_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z},$$

donc $|D_n| = \frac{|1 - z^n|}{|1 - z|} \leqslant \frac{1 + |z|^n}{|1 - z|}$ par inégalité triangulaire et $|z| = 1$ d'où :

$$\boxed{|D_n| \leqslant \frac{2}{|1 - z|}.}$$

On a alors tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant |D_n u_{n-1}(x)| \leqslant \frac{2}{|1-z|} u_{n-1}(x) \text{ et } 0 \leqslant |D_n u_n(x)| \leqslant \frac{2}{|1-z|} u_n(x).$$

Or, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge d'après la question 1. avec $p = 1$.
On en déduit par comparaison que :

$$\boxed{\text{les séries } \sum_n D_n u_{n-1}(x) \text{ et } \sum_n D_n u_n(x) \text{ sont absolument convergentes.}}$$

II.9. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} D_n(u_{n-1}(x) - u_n(x)) &= \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_{n-1}(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_n(x) \quad \text{(ces deux séries convergent)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} D_{n+1} u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_n(x) = D_1 u_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (D_{n+1} - D_n) u_n(x) \\
&= 1 \times \frac{0^r}{0!} x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \frac{n^r}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} (zx)^n.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} D_n(u_{n-1}(x) - u_n(x)) = S_{r,1}(zx).}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} D_n(u_{n-1}(x) - u_n(x))$ converge absolument (par comparaison puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|D_n(u_{n-1}(x) - u_n(x))| \leqslant |D_n u_{n-1}(x)| + |D_n u_n(x)|$), on a par inégalité triangulaire :

$$|S_{r,1}(zx)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |D_n|\,|u_{n-1}(x) - u_n(x)| \leqslant \frac{2}{|1-z|} \sum_{n=1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)|.$$

En utilisant les variations de la suite $(u_n(x))_n$ obtenues à la question 3., on a :

$$\begin{aligned}
|S_{r,1}(zx)| &\leqslant \frac{2}{|1-z|} \left(\sum_{n=1}^{\lfloor t_x \rfloor} (u_n(x) - u_{n-1}(x)) + \sum_{n=\lfloor t_x \rfloor + 1}^{+\infty} (u_{n-1}(x) - u_n(x)) \right) \\
&= \frac{2}{|1-z|} \left(u_{\lfloor t_x \rfloor}(x) - u_0(x) + u_{\lfloor t_x \rfloor}(x) - \underbrace{\lim_{n\to+\infty} u_n(x)}_{=0 \text{ (tg série convergente)}} \right) \quad \text{par télescopage}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{|S_{r,1}(zx)| \leqslant \frac{4M_x}{|1-z|}.}$$

On a donc pour tout $x > 0$:

$$0 \leqslant \left| \frac{S_{r,1}(zx)}{x^r e^x} \right| \leqslant \frac{4}{|1-z|} \frac{M_x}{x^r e^x}.$$

Par la question 7. et le théorème de limite par encadrement, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{S_{r,1}(zx)}{x^r e^x} = 0$ d'où :

$$\boxed{S_{r,1}(zx) = \underset{x\to+\infty}{o}(x^r e^x).}$$

II.10. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a (toutes les séries en jeu convergent d'après 1.) :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!}(\xi^k x)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n \left(\sum_{k=0}^{p-1} \xi^{nk}\right).$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(\xi^n)^k = \begin{cases} p & \text{si } \xi^n = 1 \\ \frac{1-\xi^{np}}{1-\xi^n} & \text{si } \xi^n \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} p & \text{si } p|n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = \sum_{\substack{n=1\\ p|n}}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{p-1} \xi^{nk}\right)}_{=p} + \sum_{\substack{n=1\\ p\nmid n}}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{p-1} \xi^{nk}\right)}_{=0} = p\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{(p\ell)^r}{(p\ell)!} x^{p\ell} = pS_{r,p}(x).$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ \sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = pS_{r,p}(x).}$$

Comme l'énoncé $H_{r,1}$ est valide, on a $S_{r,1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^r e^x$.
De plus, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $|\xi^k| = 1$ et $\xi^k \neq 1$ donc d'après la question 9., $S_{r,1}(\xi^k x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x^r e^x)$.
On en déduit par somme finie que :

$$S_{r,p}(x) = \frac{1}{p} S_{r,1}(x) + \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = \frac{1}{p} x^r e^x + \underset{x\to+\infty}{o}(x^r e^x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p} x^r e^x.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{l'énoncé } H_{r,p} \text{ est valide.}}$$

III.11. ⋆ Soit $\sum c_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
On note f sa somme.
On sait qu'en tant que somme d'une série entière, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et on a pour tout $t \in]-R, R[$:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n t^{n-1} \text{ et } f''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n t^{n-2}.$$

On a donc pour tout $t \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} tf''(t) - f(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)nc_{n+1}t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)nc_{n+1}t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)nc_{n+1} - c_n)t^n. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-R,R[&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ tf''(t) - f(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)nc_{n+1} - c_n)t^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)nc_{n+1} - c_n = 0 \\ &\Leftrightarrow c_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_{n+1} = \frac{c_n}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

On a de plus $f'(0) = 1$ si et seulement si $c_1 = 1$.
Par récurrence, on montre que l'unique suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant toutes ces conditions est la suite définie par $c_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \dfrac{1}{n!(n-1)!} = \dfrac{n}{(n!)^2}$.
⋆ Posons $c_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \dfrac{n}{(n!)^2}$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leqslant c_n = \dfrac{1}{n!(n-1)!} \leqslant \dfrac{1}{n!}$ donc $c_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n!}\right)$.
Or, la série entière $\sum \dfrac{t^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$.
On en déduit que la série entière $\sum c_n t^n$ a un rayon de convergence R supérieur ou égal à $+\infty$ donc $R = +\infty$.

— Comme $R > 0$, par les équivalences établies au premier point, comme $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie toutes les conditions établies, la fonction f somme de la série entière $\sum c_n t^n$ est solution de (E) sur $]-R, R[= \mathbb{R}$ et $f'(0) = 1$.

On a ainsi prouvé :

$$\boxed{\text{il existe une unique fonction } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ développable en série entière sur } \mathbb{R}, \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et qui vérifie } f'(0) = 1, \text{ c'est } f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n!)^2} t^n.}$$

III.12. En utilisant la formule de Stirling, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{c_n}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{n}}{(2n)!}4^n} &= \frac{n\sqrt{\pi}(2n)!}{(n!)^2\sqrt{n}4^n} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi}\frac{n\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2\sqrt{n}4^n} \\
&= \frac{n^{3/2}\sqrt{4\pi^2}2^{2n}n^{2n}e^{2n}}{2\pi n^{3/2}n^{2n}e^{2n}4^n} = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{n}}{(2n)!}4^n.}$$

III.13. On sait que :
(i) $\sum_{n\geqslant 1} c_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ (question 11.),
(ii) $c_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$,
(iii) $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{n}}{(2n)!}4^n$ (d'après la question 12.),
donc d'après le lemme de comparaison asymptotique des séries entières, on a :

$$\begin{aligned}
f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n &\underset{t\to+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{2n}}{(2n)!}4^n t^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)^{1/2}}{(2n)!}(2\sqrt{t})^{2n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}S_{1/2,2}(2\sqrt{t}) \\
&\underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2}(2\sqrt{t})^{1/2}e^{2\sqrt{t}} = \frac{t^{1/4}}{2\sqrt{\pi}}e^{2\sqrt{t}}
\end{aligned}$$

en utilisant la validité de $H_{1/2,2}$ et le fait que $\lim\limits_{t\to+\infty} 2\sqrt{t} = +\infty$.

$$\boxed{f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^{1/4}}{2\sqrt{\pi}}e^{2\sqrt{t}}.}$$