

c) Système compatible



Définition :

Un système d'équations est dit **compatible** si et seulement si il admet au moins une solution.

En écriture matricielle, cela signifie qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ tel que $AX = B$.

En notant C_1, \dots, C_p les colonnes de A , cela signifie :



Propriété 1 :

Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si

2) Résolution d'un système et lien avec les matrices

a) Structure de l'espace des solutions



Proposition 1 :

Soit un système (S) , compatible, d'écriture matricielle $AX = B$.

Soit (S_h) le système homogène associé.

Soit X_p une solution de (S) .

Alors l'ensemble des solutions de (S) est l'ensemble

$$\{H + X_p; H \text{ est solution de } S_h\}$$

▷ Preuve :

◁

Ce système est constitué de une ou deux parties :

- ▶ La première ligne, qui permet d'exprimer la première inconnue x_1 en fonction des $p - 1$ autres,
- ▶ Si $p - 1 > 0$ et $n - 1 > 0$, un sous système \tilde{S} , de $p - 1$ lignes et $n - 1$ inconnues :

$$(\tilde{S}) : \begin{cases} \tilde{a}_{22}x_2 + \dots + \tilde{a}_{2p}x_p = \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{n2}x_2 + \dots + \tilde{a}_{np}x_p = \tilde{b}_n \end{cases}$$

③ Si le système \tilde{S} n'existe pas, on s'arrête. Si il existe, on recommence à l'étape ①.

On dit qu'on a alors **réduit le système** via le pivot de Gauss.

Remarque :

A l'étape 2, il est souvent préférable d'effectuer l'opération $L_i \leftarrow a_{11}L_i - a_{i1}L_1$, qui est la composition d'une transvection et d'une dilatation. Cela permet d'éviter l'apparition de fractions, qui sont sources d'erreurs de calcul...

c) Traduction en terme de produit matriciel



Définition : Matrices d'opérations élémentaires

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- ▶ Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on appelle **matrice de dilatation** la matrice obtenue en multipliant la i ligne de I_n par λ . On la note $D_{i,\lambda}$.
- ▶ Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, on appelle **matrice de permutation** la matrice $P_{i,j}$ obtenue en intervertissant les lignes i et j de I_n .
- ▶ Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on appelle **matrice de transvection** la matrice $T_{i,j,\lambda}$ obtenue en appliquant l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ à I_n .



Proposition 2 : Opérations sur les lignes

Toutes les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ sont obtenues en multipliant à gauche par la matrice d'opération élémentaire correspondante.

Plus précisément :

- ▶ $P_{ij}A$ donne la matrice A dont on a interverti les lignes L_i et L_j .
- ▶ $T_{i,j,\lambda}A$ revient à effectuer sur A l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
- ▶ $D_{i,\lambda}A$ revient à multiplier la ligne i de A par λ .

▷ *Preuve* :

◁

De manière analogue, on montre le résultat suivant :



Proposition 3 : Opérations sur les colonnes

Toutes les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ sont obtenues en multipliant à droite par la matrice d'opération élémentaire de taille p correspondante.

Plus précisément :

- ▶ AP_{ij} donne la matrice A dont on a interverti les colonnes C_i et C_j .
- ▶ $AT_{i,j,\lambda}$ revient à effectuer sur A l'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$
- ▶ $AD_{i,\lambda}$ revient à multiplier la colonne i de A par λ .

II Application à l'inversion des matrices

 **Rappel : Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- ▶ Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = I_n$.
- ▶ L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.
- ▶ Cet ensemble est stable par produit :
si A et B sont dans $GL_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- ▶ Cet ensemble est stable par transposition : si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $A^T \in GL_n(\mathbb{K})$.

1) Opération élémentaire et inversion



Propriété 2 :

 Toute matrice d'opération élémentaire est inversible.

▷ *Preuve* :

◁



Corolaire 1 :

| Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.

▷ *Preuve* :

◁

2) Méthodes d'inversion :

a) Inversion par résolution du système



Theorème 2 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est inversible si et seulement si quel que soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ (avec $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) possède une unique solution.

▷ *Preuve* :

**Méthode :****INVERSION PAR RÉOLUTION DE SYSTÈME**

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour inverser A , on pose $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ avec b_1, b_2, \dots, b_n des éléments de \mathbb{K} ("génériques")

et on résout le système $AX = B$.

Si ce système admet une unique solution, **sans aucune condition sur B** , c'est que A est inversible et alors $X = A^{-1}B$.

Il suffit ensuite d'identifier A^{-1} .

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cas particulier des matrices 2×2 :



Propriété 3 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

On appelle **déterminant** de A , noté $|A|$ ou $\det(A)$ le nombre

$$\det(A) = ad - bc$$

Alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et on a alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

▷ *Preuve* :

◁

Exemple :

► $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

► $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) Inversibilité et matrices triangulaires

Si A est une matrice triangulaire supérieure, alors

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si tous les coefficients diagonaux sont non nuls, alors tout système associé admet une unique solution (il suffit de remonter depuis le bas). Si l'un des coefficients est nul, le pivot de Gauss donne un rang inférieur au nombre d'inconnues. Le système admet donc soit une infinité, soit pas de solution.

On obtient donc comme résultat :



Proposition 4 :

Une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux sont non nuls.

En passant par la transposée, on obtient directement :



Corolaire 2 :

Une matrice triangulaire inférieure est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux sont non nuls.

et enfin :



Corolaire 3 :

Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale.

Alors A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.
On a alors

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

c) Réduction de Gauss-Jordan (ou méthode du miroir) :

D'après le résultat obtenu au théorème 2, la matrice est inversible si et seulement si, quel que soit le second membre, le système associé admet une unique solution.

Cela signifie qu'à la fin du pivot de Gauss pendant la résolution du système, celui-ci est de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

avec des coefficients diagonaux non nuls.

Autrement dit, on a transformé, via des opérations élémentaires, la matrice A associée en matrice triangulaire supérieure.

On peut continuer ces opérations élémentaires, en effectuant un pivot de Gauss inverse : en utilisant la dernière ligne, on va supprimer la dernière inconnue dans chacune des lignes précédentes, puis à partir de l'avant dernière ligne, supprimer les avant dernière inconnues, et ainsi de suite.

Enfin, en divisant par les coefficients diagonaux, on arrive à un système de la forme

$$\begin{cases} x_1 & & & = \tilde{b}_1 \\ & x_2 & & = \tilde{b}_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & x_n = \tilde{b}_n \end{cases}$$

La matrice de ce dernier système est

Il existe donc E_1, E_2, \dots, E_m des matrices d'opérations élémentaires telles que

$$E_1 E_2 \dots E_m A =$$

Ce qui signifie que



Méthode :

INVERSION PAR MIROIR



Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour inverser A , on peut utiliser des opérations élémentaires pour transformer A en I_n .

On applique en parallèle les mêmes opérations sur I_n .

Le résultat obtenu sur I_n est alors A^{-1} .

Exemple :

Inversez les matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.