Corrigé du DM 13

Exercice 1 : CCINP 18

1. La série de fonctions étudiée est une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
En $x = 1$, il y a convergence par le critère spécial des séries alternées.
En $x = -1$, la série diverge (série harmonique).
On a donc $D =]-1, 1]$.

2. a) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, S est continue sur $]-1, 1[$. (*)
Pour $x = 1$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ converge d'après le critère spécial des séries alternées.

Donc d'après le théorème d'Abel radial, comme la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ a pour rayon 1 et que $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ converge pour $x = 1$, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

C'est-à-dire $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = S(1)$.
Donc S est continue en 1. (**)
Donc, d'après (*) et (**), S est continue sur D.

b) $\forall\, x \in D$, $u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$.
$\|u_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in]-1,1]} |u_n(x)| = \frac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.
Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ ne converge pas normalement sur D.
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ ne converge pas uniformément sur D non plus car, sinon, on pourrait employer le théorème de la double limite en -1 et cela entraînerait la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, ce qui est absurde.

c) On étudie la convergence uniforme sur $[0, 1]$.
$\forall\, x \in [0, 1]$, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées ce qui permet de majorer son reste R_n.

On a :
$\forall\, x \in [0, 1]$, $|R_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$. (majoration indépendante de x)
Donc $||R_n||_\infty \leqslant \frac{1}{n+1}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.
Donc, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Bilan final :

En regroupant tous les résultats obtenus et le cours sur les séries entières, on peut affirmer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur tout segment de $]-1, 1[$ et converge uniformément sur tout segment de $]-1, 1]$.

Exercice 2 : CCINP 24

1. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \frac{x^n}{(2n)!}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x|}{(2n+2)(2n+1)} = 0$.
On en déduit que la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $R = +\infty$.

2. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et le rayon de convergence du développement en série entière de la fonction ch est égal à $+\infty$.

3. a) Pour $x \geqslant 0$, on peut écrire $x = t^2$ et $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(t) = \mathrm{ch}\sqrt{x}$.

Pour $x < 0$, on peut écrire $x = -t^2$ et $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \cos(t) = \cos\sqrt{-x}$.

b) D'après la question précédente, la fonction f n'est autre que la fonction S.
S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car développable en série entière à l'origine avec un rayon de convergence égal à $+\infty$.
Cela prouve que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1. Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant 1$.
Initialisation : On a $a_0 = 1 \in]0,1]$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $0 < a_k \leqslant 1$.
Montrons que $0 < a_{n+1} \leqslant 1$.
On a pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k > 0$ et $n-k \geqslant 0$ donc $\dfrac{1}{n-k+2} > 0$ donc par produit, $\dfrac{a_k}{n-k+2} > 0$ puis par somme, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} > 0$ et comme $\dfrac{1}{n+1} > 0$, on en déduit que $a_{n+1} > 0$.
On a pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k \leqslant 1$ et $n-k+2 \geqslant 2 > 0$ donc $\dfrac{1}{n-k+2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc par produit d'inégalités à termes tous positifs, on obtient $\dfrac{a_k}{n-k+2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ puis par somme, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} \leqslant \frac{n+1}{2}$ et comme $\dfrac{1}{n+1} > 0$, on en déduit que $a_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant 1$.
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n \leqslant 1.}$

2. Notons R_1 le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
La suite $(a_n 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée d'après la question précédente.
On en déduit qu'on a $1 \leqslant R_1$ puisque $R_1 = \mathrm{Sup}\{r \in \mathbb{R}_+,\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum a_n x^n \text{ est supérieur ou égal à 1.}}$$

3.(a) Notons R_2 le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n+2}$.
On a $\dfrac{1}{n+2} \sim \dfrac{1}{n}$ donc les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+2}x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}x^n$ ont même rayon de convergence. Donc :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum \frac{x^n}{n+2} \text{ est égal à 1.}}$$

3.(b) Comme $R_2 = 1$, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$, la série $\sum \dfrac{x^n}{n+2}$ converge et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > 1$, la série $\sum \dfrac{x^n}{n+2}$ diverge.
De plus, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1^n}{n+2} = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique) et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+2}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées car la suite $\left(\dfrac{1}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble de définition de la fonction } x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \text{ est } [-1,1[.}$$

3.(c) Notons R le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} w_n x^n$.
D'après le cours, on a $R \geqslant \min(R_1, R_2)$. Comme $R_1 \geqslant 1$ et $R_2 = 1$, on a $\min(R_1,R_2) = 1$ d'où $\boxed{R \geqslant 1}$.
On a de plus par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \times \frac{1}{n-k+2}$ d'où :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ w_n = (n+1)a_{n+1}.}$$

3.(d) Par produit de Cauchy, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \min(R_1,R_2)$ c'est-à-dire pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2}x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Or, en tant que somme d'une série entière, f est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence et on peut la dériver terme à terme donc :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[,\ f'(x) = f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}.}$$

4. Soit φ et ψ les fonctions définies par :

$$\varphi(x) = \ln\big(f(x)\big) \text{ et } \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

Pour tout $x \in [0,1[$, on a $f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \geqslant 1$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n x^n \geqslant 0$.
Comme f est définie et dérivable sur $[0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par composition avec la fonction ln définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction φ est définie et dérivable sur $[0,1[$ et on a pour tout $x \in [0,1[$:

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

d'après la question précédente.

Par ailleurs, par dérivation terme à terme, la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$ a même rayon de convergence que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}$ qui a pour rayon de convergence $R_2 = 1$ et on a pour tout $x \in [0,1[$:

$$\psi'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} = \varphi'(x).$$

On en déduit qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [0,1[$, $\varphi(x) = \psi(x) + K$.
Or, $\varphi(0) = \ln\big(f(0)\big) = \ln(a_0) = \ln(1) = 0$ et $\psi(0) = 0$ d'où $K = 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [0,1[,\ \ln\big(f(x)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.}$$

5. On a $\ln\big(f(0)\big) = 0$ donc $f(0) = e^0 = 1$ et pour tout $x \in]0,1[$:

$$\ln\big(f(x)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2} \quad \text{(ces deux séries convergent)}$$

donc :

$$\ln\big(f(x)\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Or, on sait que pour tout $t \in]-1,1[$, $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n$ donc pour tout $x \in]0,1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$ d'où $\ln\big(f(x)\big) = 1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\ln(1-x)$ et donc $f(x) = \exp\left(1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\ln(1-x)\right) = e(1-x)^{\frac{1}{x}-1}$.

$$\boxed{\text{On a } f(0) = 1 \text{ et pour tout } x \in]0,1[,\ f(x) = e(1-x)^{\frac{1}{x}-1}.}$$

6. On a $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ donc d'après ce qui précède, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n = f\left(\frac{1}{2}\right) = e\left(\frac{1}{2}\right)^1$.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{2^n} \text{ converge et a pour somme } \frac{e}{2}.}$$