DEVOIR SURVEILLÉ 4 - 08/01/25 - *Durée 4h*

Sujet 1 - Type CCINP

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Rappel des consignes

- ⋆ Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- ⋆ Ne pas utiliser de correcteur.
- ⋆ Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1 : Solutions développables en série entière d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0. \qquad (E)$$

Le but de cet exercice est de déterminer les solutions développables en série entière de cette équation différentielle.

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Q1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière. Exprimer avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.

Q2. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geqslant 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in]-r, r[$, on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$

Q3. Montrer que f est solution de (E) sur l'intervalle $]-r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q4. En déduire que si f est solution de (E) sur $]-r, r[$, alors $r \geqslant 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

Q5. Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors la fonction

$$g :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x}$$

est une solution de (E) sur $]-1,1[$ développable en série entière.

Exercice 2 : Endomorphisme cyclique

Présentation générale

Dans cet exercice, nous allons étudier la notion d'endomorphisme cyclique dont la définition est donnée ci-dessous. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E, \ \ f^1 = f, \ \ f^2 = f \circ f, \ \ f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

On dit que l'endomorphisme f est cyclique s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $\big(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\big)$ soit une base de l'espace vectoriel E.

Cet exercice est composé de quatre parties indépendantes. Les trois premières sont consacrées à l'étude de différents exemples. Dans la dernière partie, on détermine une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique.

Partie I - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $f : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x,y) = (4x-2y, x+y).$$

Q6. En considérant $v = (1,0) \in \mathbb{R}^2$, montrer que f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.

Q7. Déterminer les valeurs propres de f et donner une base de chaque sous-espace propre de f.

Q8. Existe-t-il un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $(w, f(w))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$?

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Q9. Montrer que l'on a la relation $g^2 = g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

Q10. Montrer que la matrice M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

Q11. L'endomorphisme g est-il cyclique ?

Partie III - Étude d'un troisième exemple

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

Par exemple, on a $\Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$.

Q12. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q13. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Calculer $\Delta(X^k)$ sous une forme développée.

Q14. En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

Q15. Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme diagonalisable h d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de h pour que cet endomorphisme soit cyclique.

Comme l'endomorphisme h est diagonalisable, il existe une base $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de l'espace vectoriel E composée de vecteurs propres de h. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note $\lambda_k \in \mathbb{C}$ la valeur propre associée au vecteur propre v_k.

Soit $v \in E$. Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Q16. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p v_n.$$

Q17. Montrer que le déterminant de la famille $\mathscr{F} = \big(v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v)\big)$ dans la base $\mathscr{B}$ est égal à :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \alpha_1 \ldots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Q18. Conclure que h est cyclique si et seulement si il admet n valeurs propres distinctes.

Exercice 3 : Étude de séries entières

On admet l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On introduit les séries entières :

$$\sum_{n \geqslant 1} h_n x^n, \quad \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} x^n \text{ et } \sum_{n \geqslant 1} \frac{h_n}{n} x^n.$$

Q19. Déterminer la limite de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant h_n \leqslant n$.

Q20. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} h_n x^n$ est égal à 1.

Pour tout $x \in]-1,1[$, on pose $H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n x^n$.

Q21. Déterminer les rayons de convergence des séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} x^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{h_n}{n} x^n$.

Pour tout $x \in]-1,1[$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ et $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n}{n} x^n$.

Q22. Donner le développement en série entière de la fonction $g : x \mapsto \ln(1-x)$.

Q23. Justifier que la fonction $G : x \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.
Établir une relation entre G et H.

Soit L la primitive de H sur l'intervalle $]-1,1[$ telle que $L(0) = 0$.

Q24. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $L(x) = \dfrac{1}{2}\big(g(x)\big)^2$.

Q25. Justifier que L est développable en série entière et expliciter son développement en série entière.

Q26. En déduire que $T - S = L$.

Q27. Soit φ la fonction définie sur $]-1,1[$ par :

$$\varphi(0) = -1 \text{ et pour tout } u \in]-1,0[\cup]0,1[,\ \varphi(u) = \frac{\ln(1-u)}{u}.$$

Montrer que φ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et préciser son développement.

Q28. Soit $y \in]0,1[$. Démontrer l'égalité :

$$\int_0^y \varphi(u)\mathrm{d}u = -S(y).$$

Q29. Justifier que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Q30. Soit $y \in]0,1[$. Montrer que

$$\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ln(y)\ln(1-y).$$

Q31. En déduire la valeur de $T\left(\dfrac{1}{2}\right)$ en fonction de π.

Exercice 4 : Intégrales de Gauss

On appelle *intégrales de Gauss* les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\mathrm{d}t$ où a est un réel strictement positif. Le but de cet exercice est de déterminer leur valeur.

Dans tout cet exercice, **on admet que l'intégrale** $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ **converge.**

Pour tout entier naturel p, on note :

$$W_p = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^p \,\mathrm{d}t.$$

Soit n un entier naturel non nul.

Q32. À l'aide d'un changement de variable, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Q33. À l'aide d'un changement de variable, montrer que :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = W_{2n+1}.$$

Q34. À l'aide d'un changement de variable, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = W_{2n-2}.$$

Q35. Montrer que pour tout réel u, on a $e^u \geqslant 1+u$.

Q36. Montrer alors que :

$$\begin{cases} (1-u)^n \leqslant e^{-nu} & \text{si} \quad u \leqslant 1 \\ e^{-nu} \leqslant \dfrac{1}{(1+u)^n} & \text{si} \quad u > -1. \end{cases}$$

Q37. En déduire les inégalités suivantes :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}.$$

Q38. En admettant que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, déterminer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Q39. En déduire que pour tout $a \in]0,+\infty[$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\mathrm{d}t$ converge et déterminer sa valeur.

FIN