DEVOIR SURVEILLÉ 4 - *Sujet 1*

Corrigé

Exercice 1 : Solutions développables en série entière d'une équation différentielle (CCINP 2019)

Q1. Comme la fonction f est la somme d'une série entière, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (et donc en particulier de classe $\mathscr{C}^2$) sur son intervalle ouvert de convergence $]-r,r[$ et on peut dériver terme à terme sur $]-r,r[$. Ainsi :

$$\forall x \in]-r,r[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \text{ et } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

On en déduit que f' et f'' sont développables en série entière sur $]-r,r[$.
De plus, d'après le cours, les séries entières définissant f, f' et f'' ont le même rayon de convergence c'est-à-dire r.

Q2. Pour tout $x \in]-r,r[$, on a :

$$\begin{aligned}
x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) &= x^2(1-x)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x(1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=3}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&\qquad \text{(changements d'indices)} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \left(\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n - 0\right) - \left(a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^n\right) \\
&\qquad - \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n + \left(a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n\right) \\
&= a_0 + a_1 x - a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty}\big(n(n-1)a_n - (n-1)(n-2)a_{n-1} - n a_n - (n-1)a_{n-1} + a_n\big)x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{gathered}\text{en posant pour tout } n \geqslant 2,\ b_n = (n-1)^2, \text{ on a bien pour tout } x \in]-r,r[, \\ x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.\end{gathered}}$$

Q3. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-r,r[&\iff \forall x \in]-r,r[,\ x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = 0 \\
&\iff \forall x \in]-r,r[,\ a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n = 0 \\
&\overset{(\star)}{\iff} \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 2, (n-1)^2(a_n - a_{n-1}) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 2, a_n = a_{n-1} \end{cases} \qquad (\text{ car } (n-1)^2 \neq 0)
\end{aligned}$$

$(\star)$ Par unicité des cœfficients du développement en série entière ($r > 0$) car pour tout $x \in]-r, r[$, $0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0x^n$. On en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-r,r[\text{ si et seulement si } a_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n.}$$

Q4. On suppose que f est solution de (E) sur $]-r,r[$.
D'après la question précédente, la suite (a_n) est stationnaire à partir du rang 1 donc en posant $a_1 = \lambda \in \mathbb{R}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \lambda$ et $a_0 = 0$.
On en déduit que la fonction f est la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x^n$.
On sait que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} x^n$ a pour rayon de convergence 1 et on a pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$ (série géométrique).
Si $\lambda = 0$ alors on a clairement $r = +\infty$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.
Si $\lambda \neq 0$ alors on a $r = 1$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \lambda\frac{x}{1-x}$.
Dans les deux cas, on a bien :

$$\boxed{r \geqslant 1 \text{ et pour tout } x \in]-1,1[,\ f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.}$$

Q5. Réciproquement, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction g définie par : $\forall x \in]-1,1[$, $g(x) = \frac{\lambda x}{1-x}$.
On sait que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et on a pour tout $x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
On en déduit que g est développable en série entière et on a pour tout $x \in]-1,1[$:

$$g(x) = \lambda x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x^n.$$

D'après l'équivalence établie à la question **??**, g est solution de (E) sur $]-1,1[$.
Pour vérifier que g est solution de (E) sur $]-1,1[$, on peut aussi vérifier l'équation par le calcul.
On a pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) = -\lambda + \frac{\lambda}{1-x}$, $g'(x) = \frac{\lambda}{(1-x)^2}$ et $g''(x) = \frac{2\lambda}{(1-x)^3}$ d'où :

$$x^2(1-x)g''(x) - x(1+x)g'(x) + g(x) = \frac{2\lambda x^2}{(1-x)^2} - \frac{\lambda x(1+x)}{(1-x)^2} + \frac{\lambda x}{1-x} = \frac{\lambda x^2 - \lambda x + \lambda x(1-x)}{(1-x)^2} = 0.$$

$$\boxed{\text{Si } \lambda \in \mathbb{R} \text{ alors } g : x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x} \text{ est une solution de } (E) \text{ sur }]-1,1[\text{ développable en série entière.}}$$

Conclusion : par analyse-synthèse, on a ainsi prouvé que les solutions de (E) développables en série entière sont les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x}$, qui seront solutions de (E) sur $]-1,1[$ ($\mathbb{R}$ dans le cas $\lambda = 0$).

Exercice 2 - Endomorphisme cyclique (CCINP PC 2023)

Partie I - Étude d'un premier exemple

Q6. Avec $v = (1,0)$, on a $f(v) = (4,1)$.
La famille $(v, f(v))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$ (car constituée de deux vecteurs non colinéaires), de cardinal

$2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$.
On en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme cyclique de } \mathbb{R}^2.}$$

Q7. Notons $\mathscr{C} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
La matrice de f dans la base $\mathscr{C}$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$.
On en déduit que $\text{Sp}(A) = \{2, 3\}$.
Les valeurs propres 2 et 3 sont de multiplicité 1 donc les sous-espaces propres associés sont de dimension 1 (car la dimension du sous-espace propre est supérieure à 1 et inférieure à la multiplicité de la valeur propre correspondante).
On constate de plus que la somme des cœfficients sur chaque ligne de A vaut 2 donc $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre (car constituée d'un seul vecteur non nul) de $E_2(A)$, de cardinal 1 avec $1 = \dim(E_2(A))$ donc c'est une base de $E_2(A)$.
On a $A - 3I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et on constate que $(A - 3I_2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi, on prouve de même que $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_3(A)$.
Comme A est la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$, f a les mêmes valeurs propres de A et les sous-espaces propres sont reliés par les relations vectoriel/matriciel dans la base $\mathscr{C}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } f \text{ sont 2 et 3, } ((1,1)) \text{ est une base de } E_2(f) \text{ et } ((2,1)) \text{ est une base de } E_3(f).}$$

Q8. Posons $w = (1, 1)$. On sait par ce qui précède que $f(w) = 2w$ donc la famille $(w, f(w))$ est liée et n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^2$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe un vecteur } w \in \mathbb{R}^2 \text{ non nul tel que la famille } (w, f(w)) \text{ ne soit pas une base de } \mathbb{R}^2.}$$

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Q9. On a $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $M + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ donc $M^2 = M + 2I_3$.
Comme M est la matrice de g dans une base de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que :

$$\boxed{g^2 = g + 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}.}$$

Q10. La matrice M est symétrique à cœfficients réels donc $\boxed{M \text{ est diagonalisable.}}$
Posons $P = X^2 - X - 2$. On a $P(M) = M^2 - M - 2I_3 = 0_3$ donc P est un polynôme annulateur de M.
On en déduit que les valeurs propres de M sont des racines de P.
Comme $P = (X+1)(X-2)$, on a donc $\text{Sp}(M) \subset \{-1, 2\}$.
Le polynôme P est un polynôme annulateur de M, scindé à racines simples, ce qui donne une nouvelle preuve de la diagonalisabilité de M.
Étudions si le réel -1 est une valeur propre de M.
On a $M + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est de rang 1 car $C_2 = -C_1$, $C_3 = C_1$ et $C_1 \neq 0_{3,1}$.
Comme $\text{rg}(M + I_3) \neq 3$, on en déduit que $-1 \in \text{Sp}M$ et par le théorème du rang, on a

$$\dim(E_{-1}) = \dim(\text{Ker}(M + I_3)) = 3 - 1 = 2.$$

Comme M est diagonalisable, son polynôme caractéristique est scindé et la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension de son sous-espace propre.
On en déduit que -1 est une valeur propre de multiplicité 2.
Comme χ_M est de degré 3, il y a nécessairement une autre valeur propre donc 2 est aussi une valeur propre de M.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } M \text{ sont } -1 \text{ et } 2.}$$

Q11. Soit $v \in \mathbb{R}^3$.
La famille $(v, g(v), g^2(v))$ est liée car d'après la question 9, $g^2(v) = g(v) + 2v$.
Il n'existe donc pas de vecteur v de $\mathbb{R}^3$ tel que la famille $(v, g(v), g^2(v))$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } g \text{ n'est pas cyclique.}}$$

Partie III - Étude d'un troisième exemple

Q12. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $\deg(P(X+1)) = \deg(P(X)) \leqslant n$.
En tant que combinaison linéaire de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$, $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Montrons que Δ est une application linéaire.
Soit $(P, Q) \in \left(\mathbb{R}_n[X]\right)^2$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\Delta(\lambda P+\mu Q) = (\lambda P+\mu Q)(X+1)-(\lambda P+\mu Q)(X) = \lambda P(X+1)+\mu Q(X+1)-\lambda P(X)-\mu Q(X) = \lambda\Delta(P)+\mu\Delta(Q).$$

On en déduit que :

$$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Q13. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Si $k = 0$ alors $\Delta(1) = 1 - 1 = 0$.
Si $k \geqslant 1$ alors en utilisant le binôme de Newton, on obtient :

$$\Delta\left(X^k\right) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i.$$

$$\boxed{\Delta(1) = 0 \text{ et pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ \Delta(X^k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i.}$$

Q14. Notons que d'après l'expression précédente, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\deg(\Delta(X^k)) = k-1$ car $\binom{k}{k-1} = k \neq 0$.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non constant.
Notons $d \geqslant 1$ son degré et $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_d X^d$ (on a en particulier $\alpha_d \neq 0$).
Par linéarité de Δ, on a $\Delta(P) = \alpha_0\Delta(1) + \alpha_1\Delta(X) + \cdots + \alpha_d\Delta(X^d) = \alpha_1\Delta(X) + \cdots + \alpha_d\Delta(X^d)$.
Comme pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\deg(\Delta(X^k)) = k - 1$, on a $\deg\big(\alpha_1\Delta(X) + \cdots + \alpha_{d-1}\Delta(X^{d-1})\big) \leqslant d - 2$ et $\deg\big(\alpha_d\Delta(X^d)\big) = d - 1$ puisque $\alpha_d \neq 0$.
Ainsi, $\deg(\Delta(P)) = d - 1$.

$$\boxed{\text{Si } P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ est un polynôme non constant, alors } \deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1.}$$

Q15. Considérons le vecteur X^n.
Par Q14, la famille $(X^n, \Delta(X^n), \Delta^2(X^n), \cdots, \Delta^n(X^n))$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés de n à 0. C'est donc une famille libre de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$, qui est de dimension $n+1$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } \Delta \text{ est cyclique.}}$$

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Q16. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Comme v_k est un vecteur propre de h associé à la valeur propre λ_k, on a $h(v_k) = \lambda_k v_k$.
Par le cours, on sait alors que si P est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, on a $P(h)(v_k) = P(\lambda_k)v_k$.
En appliquant ceci avec $P = X^p$, on obtient que $h^p(v_k) = \lambda_k^p v_k$.
Or, comme $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, on a par linéarité de h^p :

$$h^p(v) = \alpha_1 h^p(v_1) + \cdots + \alpha_n h^p(v_n).$$

En remplaçant par l'égalité obtenue pour $h^p(v_1), \dots, h^p(v_n)$, on en déduit que :

$$\boxed{h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p (v_n).}$$

Q17. On a $\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ et par la question 16, pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(h^p(v)) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda_1^p \\ \vdots \\ \alpha_n \lambda_n^p \end{pmatrix}$.
On en déduit que :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\lambda_1 & \cdots & \alpha_1\lambda_1^{n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_2\lambda_2 & \cdots & \alpha_2\lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n\lambda_n & \cdots & \alpha_n\lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \alpha_1 \dots \alpha_n \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

par linéarité du déterminant par rapport à chaque ligne.
On reconnaît alors le déterminant de Vandermonde $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (éventuellement en transposant si la définition a été donnée dans l'autre sens, une matrice et sa transposée ayant le même déterminant).
Comme $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$, on en déduit le résultat souhaité :

$$\boxed{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \alpha_1 \dots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i).}$$

Q18. $\star$ Si h admet n valeurs propres distinctes alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$, on a $\lambda_i \neq \lambda_j$ (car tous les sous-espaces propres sont de dimension 1 donc deux vecteurs propres de la famille $\mathscr{B}$ ne peuvent pas être associés à la même valeur propre, sinon $\mathscr{B}$ serait une famille liée).
On en déduit que $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$.
En prenant par exemple $v = v_1 + \cdots + v_n$, on a alors par la question précédente $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$ donc la famille $\mathscr{F}$ est une base de E.
On en déduit que l'endomorphisme h est cyclique.
$\star$ Si h est cyclique alors il existe $v \in E$ tel que la famille $\mathscr{F}$ soit une base de E et donc vérifiant $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$.
On a alors nécessairement $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$ par la question précédente donc pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i < j$, on a $\lambda_j \neq \lambda_i$.
On en déduit que h admet n valeurs propres distinctes.

$$\boxed{h \text{ est cyclique si et seulement s'il admet } n \text{ valeurs propres distinctes.}}$$

Exercice 3 : Étude de séries entières (E3A PC 2018)

Q19. On reconnaît la suite des sommes partielles de la série harmonique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ qui est une série divergente à termes positifs.
Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} h_n = +\infty.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $0 \leqslant \frac{1}{k} \leqslant 1$ donc par somme : $0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} 1 = n$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant h_n \leqslant n.}$$

Q20. D'après la question précédente, on a $h_n = O(n)$ donc $R\left(\sum_{n\geqslant 1} h_n x^n\right) \geqslant R\left(\sum_{n\geqslant 1} n x^n\right)$.

Or, on sait que $R\left(\sum_{n\geqslant 1} n^1 x^n\right) = 1$.

Donc $R\left(\sum_{n\geqslant 1} h_n x^n\right) \geqslant 1$.

De plus, par la question précédente, $\lim_{n\to+\infty} h_n = +\infty$.

Comme $(h_n 1^n)$ ne converge pas vers 0, on a $1 \geqslant R\left(\sum_{n\geqslant 1} h_n x^n\right)$.

Ainsi :

$$\boxed{R\left(\sum_{n\geqslant 1} h_n x^n\right) = 1.}$$

Q21. On a par le cours :

$$R\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} x^n\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 1} n^{-2} x^n\right) = 1 \text{ et } R\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{h_n}{n} x^n\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 1} n \times \frac{h_n}{n} x^n\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 1} h_n x^n\right) = 1$$

$$\boxed{R\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} x^n\right) = 1 \text{ et } R\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{h_n}{n} x^n\right) = 1.}$$

Q22. On sait que pour tout $x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

donc $g(x) = \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-x)^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ (puisque $-x \in]-1,1[$).

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-1,1[,\ g(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.}$$

Q23. Les fonctions $x \mapsto \ln(1-x)$ et $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sont développables en série entière sur $]-1,1[$ donc par produit de Cauchy, la fonction G est développable en série entière sur $]-1,1[$ et on a pour tout $x \in]-1,1[$:

$$G(x) = \ln(1-x) \times \frac{1}{1-x} = -\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$$

où on a posé $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ -1/n & \text{si } n > 0 \end{cases}$ et $b_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a alors pour tout $x \in]-1,1[$, $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ c'est-à-dire $c_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = -h_n$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[,\ G(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} h_n x^n = -H(x).}$$

Q24. Notons que la fonction L est bien définie car H est continue sur l'intervalle $]-1,1[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence égal à 1.

La fonction L est une primitive de H et $H = -G : x \mapsto \underbrace{\dfrac{-1}{1-x}}_{g'(x)} \times \underbrace{\ln(1-x)}_{g(x)}$ sur $]-1,1[$ donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]-1,1[$, $L(x) = \dfrac{1}{2}\big(\ln(1-x)\big)^2 + K$.
Comme $L(0) = 0$, on obtient $K = 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[,\ L(x) = \frac{1}{2}\big(g(x)\big)^2.}$$

Q25. En tant que primitive d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$, L est développable en série entière sur $]-1,1[$ et on a pour tout $x \in]-1,1[$ (par intégration terme à terme sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence) :

$$L(x) = L(x) - L(0) = \int_0^x H(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} h_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n}{n+1} x^{n+1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-1,1[,\ L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n}{n+1} x^{n+1}.}$$

Q26. On a donc pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
(T-S)(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n}{n} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nh_n - 1}{n^2} x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{nh_n - 1}{n^2} x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{h_{n-1}}{n} x^n \quad \left(\text{car } h_1 = 1 \text{ et pour } n \geqslant 2,\ nh_n - 1 = n(h_{n-1} + \frac{1}{n}) - 1 = nh_{n-1}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{h_j}{j+1} x^{j+1} \quad (\text{en posant } j = n-1) \\
&= L(x).
\end{aligned}$$

$$\boxed{T - S = L.}$$

Q27. Pour tout $u \in]-1,1[$, $\ln(1-u) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}$, donc pour tout $u \in]-1,1[\smallsetminus \{0\}$:

$$\varphi(u) = \frac{\ln(1-u)}{u} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n+1}.$$

Cette égalité est encore valable pour $u = 0$ (on a posé $\varphi(0) = -1$).
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est développable en série entière sur }]-1,1[\text{ et pour tout } u \in]-1,1[,\ \varphi(u) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n+1}.}$$

Q28. Comme $[0,y]$ est un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, on peut intégrer terme à terme :

$$\int_0^y \varphi(u)\mathrm{d}u = \int_0^y -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n+1}\mathrm{d}u = -\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^y \frac{u^n}{n+1}\mathrm{d}u = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{n+1}}{(n+1)^2} = -S(y) \quad (\text{en changeant de variable}).$$

On a donc bien :

$$\boxed{\int_0^y \varphi(u)\mathrm{d}u = -S(y).}$$

Q29. La fonction $u \mapsto \dfrac{\ln(1-u)}{u}$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 (puisqu'elle coïncide sur $]0,1[$ avec la fonction φ, qui est continue sur $[0,1[$ puisque développable en série entière sur $]-1,1[$).

Ainsi, pour tout $y \in]0,1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u$ converge et on a $\displaystyle\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u = -S(y)$.

Montrons que la fonction S est définie et continue sur $[0,1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^2}x^n$ est continue sur $[0,1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ donc $0 \leqslant \|f_n\|_\infty^{[0,1]} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

Or, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$).

Par comparaison par inégalité, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty^{[0,1]}$ converge c'est-à-dire que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[0,1]$.

Ainsi, la fonction $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est définie et continue sur $[0,1]$.

On a donc par continuité de S en 1, $\displaystyle\lim_{y\to 1} S(y) = S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ainsi, $\displaystyle\lim_{y\to 1}\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6} \in \mathbb{R}$.

On en déduit que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u \text{ converge et } \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}du = -\frac{\pi^2}{6}.}$$

Q30. Pour tout $y \in]0,1[$, $1-y \in]0,1[$ donc d'après la question 28, on a :

$$S(1-y) = -\int_0^{1-y} \frac{\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u.$$

Posons le changement de variable affine $t = 1-u$. On a aussi $u = 1-t$ et $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$.

Comme l'intégrale définissant $S(1-y)$ converge, on obtient :

$$S(1-y) = -\int_1^y \frac{\ln(t)}{1-t}(-\mathrm{d}t) = \int_1^y \frac{\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t.$$

Posons pour tout $t \in]0,y]$, $u(t) = \ln t$ et $v(t) = -\ln(1-t)$.

Alors u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,y]$ et pour tout $t \in]0,y[$, $u'(t) = \dfrac{1}{t}$, $v'(t) = \dfrac{1}{1-t}$.

$u(t)v(t) = -\ln(1+(t-1))\ln(1-t) \underset{t\to 1}{\sim} (1-t)\ln(1-t) \underset{t\to 1}{\to} 0$ par croissances comparées (en composant avec $1-t \underset{t\to 1}{\to} 0$).

Enfin, l'intégrale définissant $S(1-y)$ converge donc on peut intégrer par parties et :

$$\begin{aligned} S(1-y) &= [-\ln(t)\ln(1-t)]_1^y + \int_1^y \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t \\ &= -\ln(y)\ln(1-y) - \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t + \int_0^y \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t \\ &= -\ln(y)\ln(1-y) + \frac{\pi^2}{6} - S(y) \quad \text{(d'après les questions 28 et 29).} \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ln(y)\ln(1-y).}$$

Q31. D'après la question 26, on a $T(1/2) = S(1/2) + L(1/2)$.

Or, d'après la question 24, on a $L(1/2) = \dfrac{(\ln(1/2))^2}{2}$ et, d'après la question 30 avec $y = 1/2$, on a

$$2S(1/2) = \frac{\pi^2}{6} - (\ln(1/2))^2 \quad \text{donc} \quad S(1/2) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln(1/2))^2}{2}.$$

On a donc :

$$\boxed{T(1/2) = \frac{\pi^2}{12}.}$$

Exercice 4 : Intégrale de Gauss

Q32. La fonction $x \mapsto e^{-nx^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
En utilisant le changement de variable $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}t$ (licite car changement de variable affine), on obtient que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et de même valeur en cas de convergence.
Comme on a admis que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, on obtient par linéarité que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t$ converge également et on a de plus :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On obtient ainsi que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \text{ converge et } \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.}$$

Q33. Notons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$ est une intégrale « ordinaire » car la fonction $x \mapsto (1-x^2)^n$ est continue sur le segment $[0, 1]$.
En utilisant le changement de variable $x = \sin\theta$ (licite car $\theta \mapsto \sin\theta$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$, de dérivée $\theta \mapsto \cos\theta$), on obtient :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)^n \cos\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta\mathrm{d}\theta.$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = W_{2n+1}.}$$

Q34. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
Avec le changement de variable $x = \tan\theta$ (licite car $\theta \mapsto \tan\theta$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $[0, \pi/2[$, de dérivée $\theta \mapsto \dfrac{1}{\cos^2\theta}$), on obtient que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^n}\frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$ sont de même nature, et en cas de convergence de même valeur.
Or, pour tout $\theta \in [0, \pi/2[$, on a :

$$\frac{1}{(1+\tan^2\theta)^n}\frac{1}{\cos^2\theta} = (\cos^2\theta)^n\frac{1}{\cos^2\theta} = (\cos\theta)^{2n-2}.$$

La fonction $\theta \mapsto (\cos\theta)^{2n-2}$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^n}\frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$ converge.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = W_{2n-2}.}$$

Q35. La fonction exponentielle est convexe (car elle est deux fois dérivable, de dérivée seconde positive) donc sa courbe représentative se situe au-dessus de sa tangente en 0 qui a pour équation $y = x + 1$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout réel } u, \text{ on a } \mathrm{e}^u \geqslant 1 + u.}$$

Q36. Soit $u \in \mathbb{R}$.
D'après la question 35 appliquée en $-u$, on a pour $u \leqslant 1$:

$$0 \leqslant 1 - u \leqslant \mathrm{e}^{-u} \ \text{ donc } \ (1-u)^n \leqslant \mathrm{e}^{-nu}$$

par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$.
D'après la question 35 appliquée en u, on a pour $u > -1$:

$$0 < 1 + u \leqslant \mathrm{e}^{u} \ \text{ donc } \ \mathrm{e}^{-nu} \leqslant \frac{1}{(1+u)^n}$$

par décroissance de la fonction $x \mapsto x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1-u)^n \leqslant \mathrm{e}^{-nu} & \text{si } u \leqslant 1 \\ \mathrm{e}^{-nu} \leqslant \dfrac{1}{(1+u)^n} & \text{si } u > -1. \end{array}}$$

Q37. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $u = x^2 \leqslant 1$ donc d'après la question 36, $(1-x^2)^n \leqslant \mathrm{e}^{-nx^2}$.
Par croissance de l'intégrale ($0 \leqslant 1$), on en déduit que :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2} \, \mathrm{d}x \ \text{ puis } \ \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2} \, \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2} \, \mathrm{d}x$$

(par positivité de l'intégrale (convergente) car pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\exp(-nx^2) \geqslant 0$).
Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $u = x^2 > -1$, donc d'après la question 36, $\mathrm{e}^{-nx^2} \leqslant \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ donc par croissance de l'intégrale (les deux intégrales en jeu convergent) :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_0^1 (1-x^2)^n \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}.}$$

Q38. En utilisant les questions 32, 33 et 34, les inégalités obtenues en question 37 deviennent :

$$W_{2n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t \leqslant W_{2n-2}.$$

On admet que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ donc $W_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ (suite extraite) donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} W_{2n+1} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et de même, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} W_{2n-2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Par passage à la limite dans les inégalités ci-dessus après multiplication par $\sqrt{n}$, on obtient :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On en déduit la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Q39. Soit $a \in]0,+\infty[$. La fonction $t \mapsto e^{-at^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
En utilisant le changement de variable $x = \sqrt{a}t$ (licite car changement de variable affine) dans l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, on obtient que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\sqrt{a}\,\mathrm{d}t$ converge et a même valeur.
Comme $\sqrt{a} \neq 0$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t$ converge et on a par linéarité :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\sqrt{a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De plus, comme la fonction $t \mapsto e^{-at^2}$ est paire, par le changement de variable $u = -t$, on obtient que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t$, elle est donc convergente, et elle a la même valeur.
On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge et a pour valeur } \sqrt{\frac{\pi}{a}}.}$$