DEVOIR SURVEILLÉ 4 - 08/01/25 - *Durée 4h*

Sujet 2 - Type Mines-Centrale

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Rappel des consignes

⋆ Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.

⋆ Ne pas utiliser de correcteur.

⋆ Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Problème 1 : Matrices semi-simples

Notations

— n désigne un entier naturel non nul.
— $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
— $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n et à coefficients dans $\mathbf{K}$ et pour une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique.
— On confondra abusivement, pour le calcul matriciel, le vecteur $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbf{K}^n$ avec la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$.
— Pour $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbf{C}^n$, on notera son conjugué $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$, sa partie réelle $\mathrm{Re}(X) = \dfrac{X + \overline{X}}{2}$ et sa partie imaginaire $\mathrm{Im}(X) = \dfrac{X - \overline{X}}{2i}$.
— Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ (respectivement $\mathbf{C}^n$) canoniquement associé à M est :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ X & \longmapsto & MX \end{array} \quad \left(\text{respectivement } \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^n & \longrightarrow & \mathbf{C}^n \\ X & \longmapsto & MX \end{array} \right).$$

Rappels

Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ si il existe une matrice P de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ si il existe une matrice P de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Objectifs

— La partie 1 concerne l'étude de propriétés de matrices semi-simples.
— La partie 2 propose de trouver une caractérisation de matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

I. Matrices semi-simples

Définition 1 Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est dite **semi-simple** si elle est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

Définition 2 Une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est dite **presque diagonale** s'il existe :

i) deux entiers naturels p et q ;

ii) q réels $a_1, a_2, \dots, a_q$;

iii) q réels non nuls $b_1, b_2, \dots, b_q$;

iv) une matrice D diagonale de $\mathscr{M}_p(\mathbf{R})$ tels que $p + 2q = n$ et M est la matrice bloc suivante :

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & M(a_1, b_1) & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & M(a_2, b_2) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & M(a_q, b_q) \end{pmatrix}$$

où, $\forall j \in [\![1, q]\!]$, $M(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$.

Si $p = 0$, la matrice D n'est pas présente dans la matrice diagonale par blocs M.

De même, si $q = 0$, alors $M = D$.

Q1. Soit A la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est-elle semi-simple ?

Q2. Soit B la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que B est semi-simple et en déduire l'existence d'une matrice Q de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ inversible et de deux réels a et b à déterminer tels que :

$$B = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Indication : on pourra, pour un vecteur propre V de B, introduire les vecteurs $W_1 = \mathrm{Re}(V)$ et $W_2 = \mathrm{Im}(V)$.

Q3. Soit M une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

On suppose dans cette question seulement que M admet deux valeurs propres complexes $\mu = a + ib$ et $\bar{\mu} = a - ib$ avec $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}^*$.

Démontrer que M est semi-simple et semblable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ à la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Q4. Soit M une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
Démontrer que M est semi-simple si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :
i) M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$;
ii) χ_M admet deux racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nulle.

Q5. Soit N une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ semblable à une matrice presque diagonale.
Démontrer que N est semi-simple.

Q6. Soit N une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Donner la forme factorisée de χ_N dans $\mathbf{C}[X]$, en précisant dans les notations, les racines réelles et les racines complexes conjuguées.
En déduire que si N est semi-simple alors elle est semblable dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ à une matrice presque diagonale.

II. Une caractérisation des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$

Dans cette partie, E désigne un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n et u désigne un endomorphisme de E.

On suppose dans les questions 7., 8. et 9. que u est diagonalisable. On note $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Soit F un sous-espace vectoriel de E, différent de $\{0_E\}$ et de E.

Q7. Démontrer qu'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $v_k \notin F$ et qu'alors F et la droite vectorielle engendrée par v_k sont en somme directe.

On note alors :

$$\mathcal{A} = \{H \text{ sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } u(H) \subset H \text{ et } F \cap H = \{0_E\}\}$$

et :

$$\mathcal{L} = \{p \in \mathbf{N}^* \mid \exists H \in \mathcal{A} : p = \dim(H)\}\,.$$

Q8. Démontrer que $\mathcal{L}$ admet un plus grand élément que l'on nommera r.

Q9. Démontrer que F admet un supplémentaire dans E, stable par u.

Q10. On suppose que tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E, stable par u. Démontrer que u est diagonalisable. En déduire une caractérisation des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde et introduire un sous-espace vectoriel, dont on justifiera l'existence, de dimension $n-1$ et contenant la somme des sous-espaces propres de u.

Problème 2 : Autour des fonctions hypergéométriques

Objectif

L'objectif du problème est l'étude de suites, séries et fonctions dites hypergéométriques et d'en donner quelques exemples en analyse.

La partie I introduit la notion de suites et séries hypergéométriques. La partie II, indépendante de la partie I, définit la fonction Γ, permettant d'étendre la factorielle à des valeurs non entières. La partie III, qui s'appuie sur certains résultats des deux premières parties, introduit deux familles de fonctions hypergéométriques. La partie IV donne un exemple de fonctions hypergéométriques dans le cadre d'une famille de polynômes.

Notations

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On note $\dbinom{n}{p}$ le coefficient binomial p parmi n, égal à $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \leqslant n$ et égal à 0 sinon.
On note $D = \mathbb{R} \setminus \{-n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des réels qui ne sont pas des entiers négatifs ou nuls.
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$, les deux notations $f^{(n)}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ sont utilisées pour la dérivée n-ième de f.

I Suites et séries hypergéométriques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *hypergéométrique* lorsqu'il existe deux polynômes non nuls P et Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n)\, u_n = Q(n)\, u_{n+1}. \tag{I.1}$$

On dit alors que P et Q sont des polynômes *associés* à la suite hypergéométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On dit également qu'une série entière $\sum u_n\, x^n$ est une série hypergéométrique lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est hypergéométrique.

Q1. Montrer qu'une suite géométrique est hypergéométrique.

Q2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite de terme général $u_n = \dbinom{n}{p}$ est hypergéométrique.

Q3. Démontrer que l'ensemble des suites vérifiant la relation (I.1), avec

$$P(X) = X(X-1)(X-2) \quad \text{et} \quad Q(X) = X(X-2),$$

est un espace vectoriel dont on précisera une base et la dimension.

Q4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite hypergéométrique de polynômes associés P et Q.
On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $P(n_0) = 0$ et, $\forall n \geqslant n_0,\ Q(n) \neq 0$.
Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

II Extension de la factorielle

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} t^{n-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

Q5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge et a pour valeur

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

On admet pour la suite que l'on peut prolonger Γ en une fonction continue sur D toujours notée Γ, qui vérifie :

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) > 0$,
- pour tout $x \in D$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

III Fonctions hypergéométriques

III.A – Symbole de Pochhammer

On définit le symbole de Pochhammer, pour tout nombre réel a et tout entier naturel n par

$$[a]_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ a(a+1)\cdots(a+n-1) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(a+k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q6. Si a est un entier négatif ou nul, justifier que la suite $([a]_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

Q7. Soit $a \in \mathbb{R}$. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $[a]_{n+1} = a[a+1]_n$.

Q8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression de $[a]_n$

– à l'aide de factorielles lorsque $a \in \mathbb{N}^*$;
– à l'aide de deux valeurs de la fonction Γ, lorsque $a \in D$.

III.B – Fonction hypergéométrique de Gauss

Étant donné trois nombres réels a, b et c, on appelle *fonction hypergéométrique de Gauss* associée au triplet (a, b, c), la fonction, définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, par

$$F_{a,b,c}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n}\, \frac{x^n}{n!}.$$

Q9. Justifier que, si $c \in D$, alors $\dfrac{[a]_n[b]_n}{[c]_n}$ est bien défini pour tout entier naturel n.

On suppose cette condition vérifiée dans les questions suivantes.

Q10. Montrer que la série entière $\sum \dfrac{[a]_n[b]_n}{[c]_n}\, \dfrac{x^n}{n!}$ est hypergéometrique et préciser des polynômes associés.

Q11. Réciproquement, démontrer que l'ensemble des séries hypergéométriques associées aux polynômes obtenus à la question précédente est un espace vectoriel dont on donnera une base et dont on précisera la dimension.

Q12. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{[a]_n[b]_n}{[c]_n}\, \dfrac{x^n}{n!}$.

Q13. Justifier que $F_{a,b,c}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$. Calculer sa dérivée et l'exprimer à l'aide d'une fonction hypergéométrique de Gauss.

Q14. Justifier que $F_{a,b,c}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et exprimer sa dérivée n-ième à l'aide d'une fonction hypergéométrique de Gauss.

Q15. Exprimer la fonction $x \mapsto F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}(-x^2)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Q16. Exprimer la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]-1,1[\setminus \{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

à l'aide d'une fonction hypergéométrique de Gauss.

On admet, en cas d'existence de toutes les quantités présentes dans l'expression suivante, que

$$F_{a,b,c}(1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Q17. Soient $N \in \mathbb{N}$, $c \in D$, $a \in \mathbb{R}$ tels que $c - a \in D$. Justifier l'existence de $F_{a,-N,c}(1)$ et démontrer que

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \frac{[a]_k}{[c]_k} = \frac{[c-a]_N}{[c]_N}.$$

Q18. Soit $(u,v) \in \mathbb{N}^2$ tels que $N \leqslant \min(u,v)$. En prenant $a = -u$ et $c = v - N + 1$, montrer l'identité de Vandermonde :

$$\binom{u+v}{N} = \sum_{k=0}^{N} \binom{u}{k} \binom{v}{N-k}.$$

Q19. Donner une interprétation combinatoire de l'identité de Vandermonde.

III.C – Fonction hypergéométrique confluente

Soient deux nombre réels a et c tels que $c \in D$.

Q20. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$xy''(x) + (c-x)y'(x) - ay(x) = 0. \tag{III.1}$$

On exprimera ces solutions à l'aide du symbole de Pochhammer et on précisera la structure algébrique de leur ensemble.

On note $M_{a,c}$ la solution de l'équation (III.1) vérifiant $M_{a,c}(0) = 1$.
Cette fonction est appelée *fonction hyper-géométrique confluente* associée au couple (a,c).

IV Les polynômes de Laguerre

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout nombre réel x,

$$\Phi_n(x) = e^{-x}\, x^n \quad \text{et} \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \Phi_n^{(n)}(x).$$

Q21. Déterminer L_0, L_1, L_2 et L_3.

Dans toute la suite, n est un entier naturel non nul.

Q22. En utilisant la formule de Leibniz, démontrer que la fonction L_n est polynomiale de degré n.
Déterminer les coefficients $c_{n,k}$ tels que $L_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} x^k$.

Q23. Pour tout nombre réel x, exprimer $\Phi_n^{(n)}(x)$ et $\Phi_n^{(n+1)}(x)$ en fonction de $L_n(x)$ et $L'_n(x)$.

Q24. Utiliser l'égalité $\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^{n+1} x\Phi_n(x)}{\mathrm{d}x^{n+1}}$, que l'on justifiera, pour démontrer l'égalité

$$L_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n(x) + \frac{x}{n+1} L'_n(x)$$

valable pour tout nombre réel x.

Q25. Utiliser l'égalité $\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^{n+1}\Phi_{n+1}^{(1)}(x)}{\mathrm{d}\, x^{n+1}}$ pour démontrer l'égalité

$$L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x)$$

valable pour tout nombre réel x.

Q26. En déduire que L_n est solution de l'équation différentielle

$$xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + n\, L_n(x) = 0. \tag{IV.1}$$

Q27. Montrer que L_n est une fonction hypergéométrique confluente.

• • • FIN • • •