DEVOIR SURVEILLÉ 4 - *Sujet 2*

Corrigé

Corrigé du problème 1 : (Mines PSI 2022)

1. On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et donc $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$.
   Ainsi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2\}$.
   Si A était diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, elle serait semblable à $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ et donc, il existerait une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que : $A = P^{-1}(2I_2)P = 2I_2$, ce qui n'est pas le cas.
   Donc $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, c'est-à-dire :

$$\boxed{A \text{ n'est pas semi-simple.}}$$

2. On a $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $\chi_B = X^2 - \mathrm{tr}(B)X + \det(B) = X^2 - 4X + 13$.
   Le discrimant est $\Delta = -4 \times 9 = -36 < 0$ donc χ_M possède deux racines complexes conjuguées non réelles.
   Ainsi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{2+3i, 2-3i\}$ (et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \varnothing$). χ_B est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ c'est-à-dire :

$$\boxed{B \text{ est semi-simple.}}$$

   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$. On a les équivalences suivantes.

$$BX = (2+3i)X \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x & + & 2y & = & (2+3i)x \\ -5x & + & y & = & (2+3i)y \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} (1-3i)x & + & 2y & = & 0 \\ -5x & - & (1+3i)y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} y & = & -\frac{1}{2}(1-3i)x \\ y & = & -\frac{5}{1+3i}x \ = \ -\frac{5}{10}(1-3i)x \ = \ -\frac{1}{2}(1-3i)x \end{array} \right.$$

$$\iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(1-3i) \end{pmatrix} = -\frac{x}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1-3i \end{pmatrix}$$

   Par conséquent, $E_{2+3i}(B) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1-3i \end{pmatrix}\right\}$.

   On pose $V = \begin{pmatrix} -2 \\ 1-3i \end{pmatrix}$, $W_1 = \mathrm{Re}(V) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W_2 = \mathrm{Im}(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

   On a $W_1, W_2 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et comme $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, (W_1, W_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

   Enfin, $V = W_1 + iW_2$ et $BW = (2+3i)W$ donc :

$$\underbrace{BW_1}_{\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} + i\underbrace{BW_2}_{\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} = (2+3i)(W_1+iW_2) = \underbrace{\left(2W_1 - 3W_2\right)}_{\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} + i\underbrace{\left(3W_1 + 2W_2\right)}_{\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}.$$

Par unicité de l'écriture algébrique de chaque coordonnée, on a donc :

$$BW_1 = 2W_1 - 3W_2 \quad \text{et} \quad BW_2 = 3W_1 + 2W_2.$$

En posant $Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ (matrice de passage de la base canonique à la base (W_1, W_2)), les formules de changement de base donnent donc :

$$\boxed{B = Q\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}Q^{-1}.}$$

3. C'est le cas général de la question précédente. Ici, $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ possède deux valeurs propres complexes $\mu = a + ib$ et $\overline{\mu} = a - ib$ **distinctes** car $b \neq 0$ par hypothèse.
Donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et ses sous-espaces propres sont de dimension 1. En particulier :

$$\boxed{M \text{ est semi-simple.}}$$

Il existe $V \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $E_\mu(M) = \text{Vect}\{V\}$. On reprend les notations précédentes, et on pose :

$$W_1 = \text{Re}(V) = \frac{1}{2}(V + \overline{V}) \quad \text{et} \quad W_2 = \text{Im}(V) = \frac{1}{2i}(V - \overline{V}).$$

Tout d'abord, $V = W_1 + iW_2$ et $MW = (a + ib)W$ donc :

$$\underbrace{MW_1}_{\in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} + i \underbrace{MW_2}_{\in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} = (a + ib)(W_1 + iW_2) = \underbrace{\left(aW_1 - bW_2\right)}_{\in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} + i\underbrace{\left(bW_1 + aW_2\right)}_{\in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}.$$

Par unicité de l'écriture algébrique de chaque coordonnée, on a donc :

$$MW_1 = aW_1 - bW_2 \quad \text{et} \quad MW_2 = bW_1 + aW_2.$$

Montrons alors que (W_1, W_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
V est non nul, donc W_1 et W_2 ne sont pas tous deux nuls. Par exemple, supposons que $W_1 \neq 0$. Si la famille $\{W_1, W_2\}$ était liée, il existerait $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $W_2 = \alpha W_1$. Et on aurait $V = W_1 + iW_2 = (1 + i\alpha)W_1$.
On reporte dans $MV = (a + ib)V$, et on obtient en divisant par $1 + i\alpha \neq 0$:

$$MW_1 = (a + ib)W_1 = aW_1 + ibW_1$$

Par unicité de l'écriture algébrique de chaque coordonnée, on aurait donc : $MW_1 = aW_1$ et $0 = bW_1$, ce qui est impossible puisque $b \neq 0$ et $W_1 \neq 0$.
On obtiendrait une même contradiction dans le cas où $W_2 \neq 0$.

Finalement, la famille $\{W_1, W_2\}$ est libre, et comme elle est de cardinal $2 = \dim\left(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})\right)$, c'est bien une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Pour terminer, en notant $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à la base (W_1, W_2), les formules de changement de base s'écrivent alors $M = Q\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}Q^{-1}$ et par suite :

$$\boxed{M \text{ est semblable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ à } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.}$$

4. • Supposons que **i)** ou **ii)** soit vérifié.
Si M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors elle l'est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et donc elle est semi-simple.
Si χ_M admet deux racines complexes conjuguées de parties imaginaires non nulles, ces deux racines sont donc distinctes et comme χ_M est de degré 2, ce sont exactement les racines de χ_M. Le polynôme

caractéristique de M est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et elle est bien semi-simple.

• Supposons que M soit semi-simple, elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Le polynôme caractéristique de M est un polynôme de degré 2 à coefficients réels. On note Δ son discriminant.

- Si $\Delta < 0$, alors χ_M admet deux racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nulle, et on a **ii)**.
- Si $\Delta > 0$, alors χ_M est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et on a **i)**.
- Si $\Delta = 0$, alors χ_M possède une racine double λ_0. Donc M possède une seule valeur propre λ_0. Comme M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que :

$$M = P\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0\\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix}P^{-1} = P(\lambda_0 I_2)P^{-1} = \lambda_0 I_2.$$

  Donc M est diagonale, a fortiori diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et on a toujours **i)**.

5. On suppose que N est semblable à une matrice presque diagonale M dont la forme est celle de l'énoncé. Si l'on montre que M est semi-simple, il en sera donc de même pour N (par transitivité du caractère semblable).
Pour $j \in \{1, \dots, q\}$, on note $M_j = \begin{pmatrix}a_j & b_j\\ -b_j & a_j\end{pmatrix}$ et donc M s'écrit par blocs :

$$M = \begin{pmatrix}D & 0 & \cdots & 0\\ 0 & M_1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & M_q\end{pmatrix}.$$

Or $\chi_{M_j} = X^2 - 2a_jX + a_j^2 + b_j^2$, son discrimant est $\Delta = -b_j^2 < 0$ car $b_j \neq 0$ par hypothèse.
Donc χ_{M_j} est scindé à racines simples ($\mu_j = a_j + ib_j$ et $\overline{\mu_j} = a_j - ib_j$) sur $\mathbb{C}$ et M_j est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

$$\exists P_j \in GL_2(\mathbb{C}),\quad P_j^{-1}M_jP_j = \begin{pmatrix}\mu_j & 0\\ 0 & \overline{\mu_j}\end{pmatrix} = D_j.$$

On considère alors U, V les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définies par blocs :

$$U = \begin{pmatrix}I_p & 0 & \cdots & 0\\ 0 & P_1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & P_q\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix}I_p & 0 & \cdots & 0\\ 0 & P_1^{-1} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & P_q^{-1}\end{pmatrix}.$$

Par produit matriciel par blocs, on trouve $UV = VU = I_n$ donc U est inversible et $U^{-1} = V$.
Enfin, le calcul donne :

$$U^{-1}MU = VMU = \begin{pmatrix}I_pDI_p & 0 & \cdots & 0\\ 0 & P_1^{-1}M_1P_1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & P_q^{-1}M_qP_q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_p & 0 & \cdots & 0\\ 0 & D_1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & D_q\end{pmatrix} \text{ qui est diagonale.}$$

Donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, comme M et N sont semblables, N est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et donc :

$$\boxed{N \text{ est semi-simple.}}$$

6. Notons λ_1, ..., λ_p les valeurs propres réelles de N (non nécessairement distinctes, chaque valeur propre apparaissant autant de fois que la multiplicité correspondante), puis μ_1, ..., μ_q les valeurs propres de N ayant une partie imaginaire strictement positive (aussi avec multiplicité). Comme $\chi_N \in \mathbb{R}[X]$, on retrouve $\overline{\mu}_1$, ..., $\overline{\mu}_q$ comme valeurs propres de N. Comme χ_N est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, on a $p + 2q = n$.
Ainsi :
$$\chi_N = \left[\prod_{j=1}^{p}(X - \lambda_j)\right]\left[\prod_{k=1}^{q}(X - \mu_k)(X - \overline{\mu}_k)\right].$$
On suppose que N est semi-simple.
Alors N est semblable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à la matrice diagonale $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \overline{\mu}_1, \mu_2, \overline{\mu}_2, \dots, \mu_q, \overline{\mu}_q)$.
Notons $(U_1, \dots, U_p, V_1, V_1', V_2, V_2', \dots, V_q, V_q')$ une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle l'endomorphisme u de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à N admet pour matrice Δ. On a alors $\mathbb{C}^n = E^0 \oplus E^+ \oplus E^-$ avec :
$$E^0 = \operatorname{Vect}(U_1, \dots, U_p) = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \operatorname{Sp}(u) \\ \operatorname{Im}(\lambda) = 0}} E_\lambda(u) \qquad , \qquad E^+ = \operatorname{Vect}(V_1, \dots, V_q) = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \operatorname{Sp}(u) \\ \operatorname{Im}(\lambda) > 0}} E_\lambda(u)$$
et
$$E^- = \operatorname{Vect}(V_1', \dots, V_q') = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \operatorname{Sp}(u) \\ \operatorname{Im}(\lambda) < 0}} E_\lambda(u) .$$
Les vecteurs U_1, ..., U_p peuvent être choisis dans $\mathbb{R}^n$, ce que nous supposerons désormais : en effet, à chaque valeur propre réelle λ est associé un sous-espace propre dont la dimension est la même, que l'on travaille dans $\mathbb{C}^n$ ou dans $\mathbb{R}^n$, le rang de la matrice $N - \lambda I_n$ étant le même sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.
D'autre part, la famille $(\overline{V_1}, \dots, \overline{V_q})$ est aussi une base de E^-, sa liberté résultant immédiatement de celle de la famille $(V_1, \dots, V_q)$, la relation $N\overline{V_k} = \overline{\mu}_k \overline{V_k}$ résultant trivialement de $NV_k = \mu_k V_k$, et le cardinal étant le même que celui de $(V_1', \cdots, V_q')$.
Ainsi, la famille $(U_1, \dots, U_p, V_1, \overline{V}_1, V_2, \overline{V}_2, \dots, V_q, \overline{V}_q)$ est aussi une base de $\mathbb{C}^n$ (par concaténation de bases de E^0, E^+ et E^-) dans laquelle l'endomorphisme u est représenté par la même matrice diagonale Δ.
Posons enfin pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, $W_k = \operatorname{Re}(V_k) = \dfrac{V_k + \overline{V_k}}{2}$ et $W_k' = \operatorname{Im}(V_k) = \dfrac{V_k - \overline{V_k}}{2i}$. Il est immédiat de vérifier que la famille $\mathcal{B} = (U_1, \dots, U_p, W_1, W_1', W_2, W_2', \dots, W_q, W_q')$ est libre dans $\mathbb{R}^n$ donc est une base de $\mathbb{R}^n$ puisque $p+2q = n$, et que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à N a pour matrice dans cette base la matrice presque diagonale M proposée par l'énoncé, en posant $\mu_k = a_k + ib_k$ pour tout $k \in [\![1, q]\!]$ (ce sont les mêmes calculs que dans la question **3.**).
Donc :
$$\boxed{N \text{ est semblable, dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \text{ à une matrice presque diagonale.}}$$
Remarque. Il est plus facile de montrer que N est semblable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à la matrice presque diagonale M, mais il faudrait ensuite utiliser le fait (voir DM6 Problème 1, question 8) que deux matrices réelles qui sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont aussi semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

7. Si on avait pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $v_k \in F$, puisque F est un espace vectoriel, on aurait :
$$E = \operatorname{Vect}\{v_1, \dots, v_n\} \subset F \subset E$$
et donc F serait égal à E, ce qui est exclu par l'énoncé. Donc : $\boxed{\exists k \in \{1, \dots, n\}, \quad v_k \notin F.}$
On note $H = \operatorname{Vect}\{v_k\}$. Montrons que F et H sont en somme directe.
Soit $x \in F \cap H$. On a $x \in F$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $x = \alpha v_k$.
Si on avait $\alpha \neq 0$ alors, on aurait $v_k = \dfrac{1}{\alpha} x \in F$ car $x \in F$, ce qui est exclu.
Donc $\alpha = 0$ et $x = 0$. Ainsi $F \cap H = \{0\}$ d'où :
$$\boxed{F \text{ et } H \text{ sont en somme directe.}}$$

8. On sait par le cours que la droite vectorielle $H = \mathrm{Vect}\{v_k\}$ est stable par u car v_k est un vecteur propre de u.On a donc $u(H) \subset H$ et $F \cap H = \{0\}$.
Donc $H \in \mathcal{A}$ et $1 = \dim(H) \in \mathcal{L}$.
Ainsi, $\mathcal{L}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle est majorée par n (et même par $n - \dim(F)$), donc elle possède un plus grand élément noté r.

$$\boxed{r = \max(\mathcal{L}) \leqslant n - \dim(F).}$$

9. On sait il existe un sous-espace vectoriel H_0 de E de dimension r tel que $u(H_0) \subset H_0$ et $F \cap H_0 = \{0\}$.

Montrons que $r = n - \dim(F)$. On raisonne par l'absurde en supposant que $r < n - \dim(F)$.

On note $F_0 = F \oplus H_0$. On a $\dim(F_0) = \dim(F) + \dim(H_0) = \dim(F) + r < n = \dim(E)$.
Donc F_0 est un sous-espace vectoriel de E, distinct de $\{0\}$ et de E.

Par la question 7, appliquée à F_0, il existe $j \in \{1, \dots, n\}$, tel que F_0 et $\mathrm{Vect}\{v_j\}$ soient en somme directe.
On pose alors $H_1 = H_0 \oplus \mathrm{Vect}\{v_j\}$.

On montre que $H_1 \in \mathcal{A}$:

- Soit $x \in H_1$. Il existe $x_0 \in H_0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $x = x_0 + \alpha v_j$.
Comme u est linéaire, $u(x) = u(x_0) + \alpha u(v_j)$ avec $u(x_0) \in H_0$ car $u(H_0) \subset H_0$ et $u(v_j) \in \mathrm{Vect}\{v_j\}$ car v_j est un vecteur propre de u. Et donc $u(x) \in H_1$. On a bien démontré $u(H_1) \subset H_1$.
- De plus, puisque F_0 et $\mathrm{Vect}\{v_j\}$ sont en somme directe, on a par associativité :

$$F_0 \oplus \mathrm{Vect}\{v_j\} = (F \oplus H_0) \oplus \mathrm{Vect}\{v_j\} = F \oplus H_0 \oplus \mathrm{Vect}\{v_j\} = F \oplus (H_0 \oplus \mathrm{Vect}\{v_j\}) = F \oplus H_1.$$

Donc $F \cap H_1 = \{0\}$.

Ainsi, $H_1 \in \mathcal{A}$ et comme $\dim(H_1) \in \mathbb{N}^*$, on a $\dim(H_1) \in \mathcal{L}$.
Mais ceci est impossible car $\dim(H_1) = \dim(H_0 \oplus \mathrm{Vect}\{v_j\}) = \dim(H_0) + 1 = r + 1 > r = \max(\mathcal{L})$.

Et donc on a $r = n - \dim(F)$, ainsi, $\dim(F) + \dim(H_0) = \dim(E)$ et $F \cap H_0 = \{0\}$. Donc $E = F \oplus H_0$.

$$\boxed{H_0 \text{ est bien un supplémentaire de } F \text{ dans } E\text{, stable par } u.}$$

10. Raisonnons par l'absurde : supposons que u n'est pas diagonalisable. Dans ce cas, le sous-espace vectoriel $F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ est strictement inclus dans E.
Soit une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F ($p < n$ car $F \neq E$). On la complète en base $(e_1, \dots, e_p, \dots, e_n)$ de E.
Ainsi, $H = \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_p, \dots, e_{n-1}\}$ est un hyperplan de E qui contient F. Par hypothèse, il existe un supplémentaire D de H, qui est stable par u.
On a $E = H \oplus D$ et $\dim(H) = n - 1$ donc D est une droite vectorielle.
On sait alors par le cours que D est engendrée par un vecteur e, vecteur propre de u.
On a donc $e \in F$ avec $e \neq 0_E$.
Ainsi, e est un vecteur non nul appartenant à $H \cap D$, ce qui est absurde car H et D sont en somme directe.
Ainsi, $F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E$ donc $\boxed{u \text{ est diagonalisable.}}$
Dans la question 9, on a prouvé que si u est diagonalisable alors tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par u (car si $F = \{0_E\}$ alors E est un supplémentaire de F stable par u et si $F = E$ alors $\{0_E\}$ est un supplémentaire de F stable par u). On vient de prouver la réciproque.
De plus, une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable. On en déduit la caractérisation suivante :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{une matrice } M \text{ de } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}^n \\ \text{admet un supplémentaire stable par l'endomorphisme } u \text{ de } \mathbb{C}^n \text{ canoniquement associé à } M.\end{array}}$$

Corrigé du problème 2 : (Centrale PSI 2021)

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique à valeurs réelles, alors il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=au_n$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la définition d'une suite hypergéométrique avec $P=a$ et $Q=1$.

   NB : Pour respecter l'énoncé, il faudrait avoir $P\neq 0$ et $Q\neq 0$ ce qui pose problème lorsque $a=0$. Dans ce cas, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite nulle à partir du rang 1. Pour une telle suite, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=nu_n$ (car dans ce cas, $u_1=0$ et par récurrence immédiate, pour tout $n\geqslant 1$, $u_n=0$). Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la définition d'une suite hypergéométrique avec $P=X$ et $Q=1$, polynômes non nuls.

$$\boxed{\text{Toute suite géométrique est donc hypergéométrique.}}$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}$.
   - Si $n\geqslant p$ alors $u_n=\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$ et $u_{n+1}=\binom{n+1}{p}=\frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!}$. u_n est non nul donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!}}{\frac{n!}{p!(n-p)!}}=\frac{n+1}{n+1-p}\ \text{donc}\ (n+1-p)u_{n+1}=(n+1)u_n.$$

   - Si $n<p-1$ alors $u_n=u_{n+1}=0$ (convention de l'énoncé) donc la relation précédente est encore valable.
   - Si $n=p-1$ alors $u_n=0$ (convention de l'énoncé) et $n+1-p=0$ donc la relation précédente est encore valable.

   Finalement, en posant $P=X+1$ et $Q=X+1-p$, on a deux polynômes non nuls et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(n)u_n=Q(n)u_{n+1}$ de sorte que :

$$\boxed{\text{la suite de terme général } u_n=\binom{n}{p} \text{ est hypergéométrique.}}$$

3. Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant (I.1) avec $P=X(X-1)(X-2)$ et $Q=X(X-2)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E si et seulement si :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad n(n-2)u_{n+1}=n(n-1)(n-2)u_n$$

   ce qui équivaut après simplification à :

$$\forall n\in\mathbb{N}\smallsetminus\{0,2\},\quad u_{n+1}=(n-1)u_n.$$

   (Attention de bien considérer $n\notin\{0,2\}$ au moment de diviser par $n(n-2)$ pour que ce terme soit non nul ; pour $n\in\{0,2\}$, la relation de récurrence donne $0=0$ donc n'apporte aucune information).
   De cette relation, on déduit $u_2=0$ (prendre $n=1$) puis par récurrence :

$$\forall n\geqslant 3,\ u_n=\left(\prod_{k=2}^{n-2}k\right)u_3=(n-2)!u_3.$$

   Ainsi, une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E si et seulement si :

$$u_2=0\quad\text{et}\quad\forall n\geqslant 3,\ u_n=(n-2)!u_3.$$

   On note qu'il n'y a pas de contrainte sur la valeur de u_0, u_1, et u_3 et que ces trois termes suffisent à déterminer entièrement u_n pour tout $n\in\mathbb{N}$, ce qui semble indiquer qu'il s'agit d'un espace vectoriel de dimension 3.

Formalisons ceci.
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note $e_i = (e_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_{i,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{si } i \neq n \end{cases}$$

et $\Gamma = (\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \{0,1,2\} \\ (n-2)! & \text{si } n \geqslant 3 \end{cases}$$

La description explicite donnée ci-dessus des suites de E montre alors qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E si et seulement si :

$$u = u_0 \cdot e_0 + u_1 \cdot e_1 + u_3 \cdot \Gamma.$$

On en déduit que E est le sous-espace vectoriel engendré par e_0, e_1, Γ.
Ainsi, E est donc bien un espace vectoriel et (e_0, e_1, Γ) est une famille génératrice de E.
Pour montrer que cette famille est libre, il suffit d'évaluer une relation de dépendance linéaire entre e_0, e_1 et Γ en $n = 0$, $n = 1$ et $n = 3$ pour constater la nullité de tous les scalaires.
Ainsi :

$$\boxed{E \text{ est un espace vectoriel et } (e_0, e_1, \Gamma) \text{ est une base de } E \text{ d'où } \dim(E) = 3.}$$

4. Pour $n \geqslant n_0$, on a $u_{n+1} = \frac{P(n)}{Q(n)} u_n$ puisque $Q(n) \neq 0$.
En évaluant en n_0, on obtient $u_{n_0+1} = 0$ puisque $P(n_0) = 0$.
Enfin, par récurrence avec la relation $u_{n+1} = \frac{P(n)}{Q(n)} u_n$, on a facilement $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant n_0 + 1$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est nulle à partir d'un certain rang.}}$$

5. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1}\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et a pour valeur $\Gamma(n) = (n-1)!$.
Initialisation : Pour $n = 1$, l'intégrale étudiée est l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$.
La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$. On a pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^x = -e^{-x} + 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et a pour valeur $1 = (1-1)!$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et a pour valeur $(n-1)!$.
Les fonctions $u : t \mapsto t^n$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et elles ont pour dérivées respectives $u' : t \mapsto nt^{n-1}$ et $v' : t \mapsto e^{-t}$.
De plus, $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(-t^n e^{-t}\right) = 0$ par croissances comparées (on a bien une limite finie).
Par le théorème d'intégration par parties, on en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(-nt^{n-1}e^{-t}\right)\mathrm{d}t$ sont de même nature, cette dernière étant de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ (car $-n$ est une constante multiplicative non nulle) donc convergente par hypothèse de récurrence.
Toujours par le théorème d'intégration par parties (et par linéarité), on a alors :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t = [-t^n e^{-t}]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{t\to+\infty}\left(-t^n e^{-t}\right) + 0^n e^{-0} + n(n-1)! = n!$$

par hypothèse de récurrence.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\mathrm{d}t \text{ converge et a pour valeur } \Gamma(n) = (n-1)!.}$$

6. Soit a un entier négatif ou nul. Si n est un entier strictement supérieur à $-a$ alors $[a]_n = \prod_{k=0}^{n-1}(a+k) = 0$ car l'entier naturel $k = -a$ apparaît comme indice dans ce produit (car $-a \in \mathbb{N}$ et $-a \leqslant n-1$).
Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } ([a]_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est nulle à partir d'un certain rang.}}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si $n = 0$ alors par définition du symbole de Pochhammer on a : $a[a+1]_0 = a = \prod_{k=0}^{0}(a+k) = [a]_1$.
Si $n \geqslant 1$ alors on a :

$$a[a+1]_n = a\prod_{k=0}^{n-1}(a+1+k) \overset{[k'=k+1]}{=} a\prod_{k'=1}^{n}(a+k') = \prod_{k'=0}^{(n+1)-1}(a+k') = [a]_{n+1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ [a]_{n+1} = a[a+1]_n.}$$

8. Soit $a \in \mathbb{N}^*$.
Si $a \geqslant 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$[a]_n = a(a+1)\dots(a+n-1) = \frac{1.2.\dots.(a-1).a(a+1)\dots(a+n-1)}{1.2.\dots.(a-1)} = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}.$$

Si $a = 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ alors la formule est encore valable car $[1]_n = 1.2.\dots.n = n! = \dfrac{(1+n-1)!}{(1-1)!}$.
La formule est également valable lorsque $n = 0$ car $[a]_0 = 1 = \dfrac{(a+0-1)!}{(a-1)!}$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour } a \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } [a]_n = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}.}$$

En utilisant la question 5, on a donc pour $a \in \mathbb{N}^*$, $[a]_n = \dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$.
Si $a \in D$ alors on peut essayer de prouver par récurrence que la formule précédente est encore valable :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathscr{P}(n) : \forall a \in D, \ [a]_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

Commençons par noter que pour tout $a \in D$, on a $\Gamma(a) \neq 0$.
En effet, on sait que si $a > 0$ alors $\Gamma(a) > 0$ et si $a \leqslant 0$ alors si on avait $\Gamma(a) = 0$ alors en itérant la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour x dans D, on aurait pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(a+n) = 0$ ce qui est absurde car pour n assez grand, $a+n > 0$.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a pour tout $a \in D$, $[a]_0 = 1 = \dfrac{\Gamma(a)}{\Gamma(a)}$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vrai.
On a pour tout $a \in D$, $a+1 \in D$ (car si $a+1$ était un entier négatif, $a = (a+1)-1$ serait un entier négatif) donc par hypothèse de récurrence :

$$[a+1]_n = \frac{\Gamma(a+1+n)}{\Gamma(a+1)} = \frac{\Gamma(a+1+n)}{a\Gamma(a)}$$

et donc par la question 7 : $[a]_{n+1} = a[a+1]_n = a\dfrac{\Gamma(a+1+n)}{a\Gamma(a)} = \dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour } a \in D, \text{ on a } [a]_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.}$$

9. On suppose que $c \in D$. Ainsi, c n'est pas un entier négatif donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c \neq -k$.
On en déduit que $c + k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc $[c]_n = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(c+k) \neq 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
Pour $n = 0$, on a directement $[c]_0 = 1 \neq 0$.
La division par $[c]_n$ est donc licite pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } c \in D \text{ alors } \frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n} \text{ est bien défini pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

10. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n}$.
Par définition, la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{n!}x^n$ est hypergéométrique si et seulement si la suite $\left(\frac{u_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est.
Or, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \ell \in \mathbb{R}, \quad [\ell]_{n+1} = (\ell+n)[\ell]_n,$$
et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = (n+1)n!$ d'où :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)}\frac{u_n}{n!}.$$
Ainsi, la suite $\left(\frac{u_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (I.1) avec $P = (a+X)(b+X)$ et $Q = (c+X)(X+1)$, qui sont deux polynômes non nuls, donc elle est hypergéométrique.

$$\boxed{\text{La série entière } \sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{n!}x^n \text{ est hypergéométrique avec } P = (a+X)(b+X) \text{ et } Q = (c+X)(X+1).}$$

11. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^2 \times D$. On pose $P = (a+X)(b+X)$ et $Q = (c+X)(X+1)$.
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite hypergéométrique associée aux polynômes P et Q.
Elle vérifie donc, après division par $Q(n) \neq 0$ (qui est bien non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$ car c n'est pas un entier négatif ou nul) :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{P(n)}{Q(n)}v_n = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)}v_n.$$
Par récurrence, on obtient alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad v_n = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(a+k)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(b+k)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(c+k)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)}v_0 = \frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n n!}v_0,$$
égalité qui reste valable pour $n = 0$.
On en déduit que toute suite hypergéométrique associée à P et Q est proportionnelle à la suite $\left(\frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et la réciproque est vraie d'après la question précédente.
On en déduit que l'ensemble recherché est $\mathrm{Vect}\left(\left(\frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.
Comme la suite $\left(\frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nulle (son terme d'indice 0 vaut 1), on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'ensemble recherché est un espace vectoriel de dimension 1 dont une base est } \left(\left(\frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right).}$$

12. Posons à nouveau $u_n = \frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si a ou b est un entier négatif ou nul alors $u_n = 0$ à partir d'un certain rang d'après la question 6 et dans ce cas le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{n!}x^n$ est donc $+\infty$.
Supposons à présent que a et b ne sont pas des entiers négatifs ou nuls.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ donc $\frac{u_n}{n!} \neq 0$ et on a :

$$\left|\frac{\frac{u_{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{u_n}{n!}}\right| = \left|\frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par la règle de d'Alembert, on en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{n!}x^n$ est égal à $\frac{1}{1} = 1$.

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{n!}x^n \text{ est égal à } \begin{cases} 1 \text{ si } a \in D \text{ et } b \in D \\ +\infty \text{ si } a \notin D \text{ ou } b \notin D. \end{cases}}$$

13. On note toujours $u_n = \frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
L'application $F_{a,b,c}$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 donc elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (et donc en particulier de classe $\mathscr{C}^1$) sur son intervalle ouvert de convergence, qui contient au moins $]-1,1[$, et elle est dérivable terme à terme sur cet intervalle.
On en déduit que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad F'_{a,b,c}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} \cdot nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!}x^n.$$

Or, d'après la question 7, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{[a]_{n+1}[b]_{n+1}}{[c]_{n+1}} = \frac{ab}{c}\frac{[a+1]_n[b+1]_n}{[c+1]_n}.$$

On en déduit que pour tout $x \in]-1,1[$, $F'_{a,b,c}(x) = \dfrac{ab}{c}F_{a+1,b+1,c+1}(x)$.

$$\boxed{F_{a,b,c} \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]-1,1[\text{ et } \forall x \in]-1,1[,\ F'_{a,b,c}(x) = \frac{ab}{c}F_{a+1,b+1,c+1}(x).}$$

14. On a déjà prouvé que $F_{a,b,c}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
On réitère la relation obtenue à la question précédente et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1,1[, \quad F^{(n)}_{a,b,c}(x) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(a+k)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(b+k)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(c+k)}F_{a+n,b+n,c+n}(x) = \frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n}F_{a+n,b+n,c+n}(x).$$

$$\boxed{F_{a,b,c} \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-1,1[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]-1,1[,\ F^{(n)}_{a,b,c}(x) = \frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n}F_{a+n,b+n,c+n}(x).}$$

15. Comme $\frac{3}{2} \in D$, on sait que $F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}$ est bien définie sur $]-1,1[$.
Soit $x \in]-1,1[$. On a alors $-x^2 \in]-1,1[$ et :

$$F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}(-x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left[\frac{1}{2}\right]_n[1]_n}{\left[\frac{3}{2}\right]_n n!}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left[\frac{1}{2}\right]_n[1]_n}{\left[\frac{3}{2}\right]_n n!}x^{2n}.$$

Or, $[1]_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{\left[\frac{1}{2}\right]_n}{\left[\frac{3}{2}\right]_n} \overset{[Q7]}{=} \frac{1}{2}\frac{\left[\frac{3}{2}\right]_{n-1}}{\left[\frac{3}{2}\right]_n} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{3}{2}+n-1\right)} = \frac{1}{2n+1}.$$

On remarque que l'égalité reste valable pour $n=0$.
On a donc pour tout $x \neq 0$:

$$F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}\left(-x^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\arctan(x)}{x}$$

et pour $x=0$: $F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}(0) = \frac{\left[\frac{1}{2}\right]_0 [1]_0}{\left[\frac{3}{2}\right]_0 0!} = 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-1,0[\cup]0,1[,\ F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}(x) = \frac{\arctan(x)}{x} \text{ et } F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}(x) = 1.}$$

16. On sait que pour tout $x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
Par conséquent, si l'on note g la fonction de l'énoncé alors on a (en divisant par x pour $x \neq 0$, l'égalité étant aussi valable en $x=0$) :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n+1}\frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[1]_n}{n+1}\frac{(-x)^n}{n!}.$$

Pour faire apparaître deux autres symboles de Pochhammer, on note qu'on a :

$$n+1 = \frac{[1]_{n+1}}{[1]_n} \overset{[Q7]}{=} \frac{[2]_n}{[1]_n}.$$

En reprenant l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[1]_n [1]_n}{[2]_n}\frac{(-x)^n}{n!} = F_{1,1,2}(-x).}$$

17. Montrons que la série $\sum \frac{[a]_n[-N]_n}{[c]_n n!}$ converge.
Comme $-N$ est un entier négatif ou nul, $[-N]_n = 0$ pour tout entier $n \geqslant N+1$ (Q6).
Ainsi, c'est une série avec un nombre fini de termes non nuls donc elle converge donc $\boxed{F_{a,-N,c}(1) \text{ existe.}}$
Comme tous ses termes sont nuls au-delà de l'indice $k \geqslant N+1$, on a :

$$F_{a,-N,c}(1) = \sum_{k=0}^{N} \frac{[a]_k[-N]_k}{[c]_k k!}.$$

Or, d'après le résultat admis dans l'énoncé, on a :

$$F_{a,-N,c}(1) = \frac{\Gamma(c-a+N)}{\Gamma(c-a)}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+N)} \overset{Q11}{=} \frac{[c-a]_N}{[c]_N}.$$

(Notons qu'il n'y a pas de problème de définition : on a $c \in D$ et $c-a \in D$ donc $\Gamma(c)$ et $\Gamma(c-a)$ existent. De plus, il est facile de vérifier que $c+N \in D$ si $c \in D$ donc $\Gamma(c+N)$ existe et de même pour $\Gamma(c-a+N)$. Enfin, $\Gamma(c-a) \neq 0$ et $\Gamma(c+N) \neq 0$).

Montrons que pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, $\frac{[-N]_k}{k!} = (-1)^k \binom{N}{k}$.
Par définition du symbole de Pochhammer, on a $\frac{[-N]_0}{0!} = 1 = (-1)^0\binom{N}{0}$ et pour tout $k \in [\![1,N]\!]$:

$$[-N]_k = (-N)(-N+1)\dots(-N+k-1) = (-1)^k N(N-1)\dots(N+1-k) = (-1)^k \frac{N!}{(N-k)!}$$

donc $\frac{[-N]_k}{k!} = (-1)^k \frac{N!}{(N-k)!k!} = (-1)^k\binom{N}{k}$.
Ainsi :

$$\boxed{F_{a,-N,c}(1) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^n \binom{N}{k}\frac{[a]_k}{[c]_k} = \frac{[c-a]_N}{[c]_N}.}$$

18. Comme $v \geqslant N$, on a $c = v - N + 1 \geqslant 1$ et $c - a = u + v - N + 1 \geqslant 1$.
Comme c et $c - a$ sont des entiers strictement positifs, ce sont bien des éléments de D.
Ainsi, on peut appliquer la question précédente qui donne, en notant S la somme :

$$S = \frac{[u+v-N+1]_N}{[v-N+1]_N} = \frac{(u+v-N+1)\dots(u+v)}{(v-N+1)\dots v} = \frac{(u+v)!(v-N)!}{(u+v-N)!v!} = \frac{\binom{u+v}{N}}{\binom{v}{N}}.$$

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on a :

$$\frac{[-u]_k}{[v-N+1]_k} = \frac{(-1)^k u(u-1)\dots(u+1-k)}{(v-N+1)\dots(v-N+k)} = \frac{(-1)^k u!(v-N)!}{(u-k)!(v-N+k)!}.$$

On a donc :

$$S = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{N!}{k!(N-k)!}\frac{(-1)^k u!(v-N)!}{(u-k)!(v-N+k)!} = \frac{N!(v-N)!}{v!}\sum_{k=0}^{N}\frac{u!}{k!(u-k)!}\frac{v!}{(v-N+k)!(N-k)!}$$

d'où $S = \dfrac{1}{\binom{v}{N}}\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\binom{u}{k}\binom{v}{N-k}$ ce qui donne bien :

$$\boxed{\binom{u+v}{N} = \sum_{k=0}^{N}\binom{u}{k}\binom{v}{N-k}.}$$

19. On se donne une urne contenant u boules blanches et v boules noires.
Quel est le nombre de manières de choisir une poignée de N boules dans cette urne ?
C'est déjà bien entendu $\binom{u+v}{N}$.
Si on note E l'ensemble des poignées de N boules de l'urne, on a aussi $E = \bigcup_{k=0}^{N} E_k$ où pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, E_k désigne l'ensemble des poignées de N boules de l'urne contenant exactement k boules blanches.
Comme il s'agit d'une union disjointe, on a $\mathrm{Card}(E) = \sum_{k=0}^{N}\mathrm{Card}(E_k)$.
Fixons $k \in [\![0,N]\!]$. Un élément de E_k est entièrement déterminé par :
   — le choix de k boules blanches parmi les u : $\binom{u}{k}$ choix
   — le choix de $N-k$ boules noires parmi les v : $\binom{v}{N-k}$ choix.

Par principe multiplicatif, on a alors $\mathrm{Card}(E_k) = \binom{u}{k}\binom{v}{N-k}$ d'où $\mathrm{Card}(E) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N}\binom{u}{k}\binom{v}{N-k}$.
On a dénombré de deux manières différentes la même situation combinatoire donc les deux résultats sont identiques ce qui redonne bien :

$$\boxed{\binom{u+v}{N} = \sum_{k=0}^{N}\binom{u}{k}\binom{v}{N-k}}.$$

20. Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif, dont on note S la somme.
Alors S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et dérivable terme à terme sur $]-R,R[$. On a donc :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n x^{n-2}.$$

On en déduit que S vérifie (III.1) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\forall x\in]-R,R[,\quad xS''(x)+(c-x)S'(x)-aS(x)=0\\
\iff&\forall x\in]-R,R[,\quad \sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)u_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}cnu_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{+\infty}nu_nx^n-\sum_{n=0}^{+\infty}au_nx^n=0\\
\iff&\forall x\in]-R,R[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)nu_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}c(n+1)u_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}nu_nx^n-\sum_{n=0}^{+\infty}au_nx^n=0\\
\iff&\forall x\in]-R,R[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)nu_{n+1}+c(n+1)u_{n+1}-nu_n-au_n\right)x^n=0,
\end{aligned}$$

si et seulement si, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière en 0 :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \left((n+1)n+c(n+1)\right)u_{n+1}-(n+a)u_n=0.$$

Cette relation de récurrence se réécrit :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad (c+n)(n+1)u_{n+1}=(a+n)u_n.$$

On reconnaît une relation de récurrence hypergéométrique, associée aux polynômes $P=X+a$ et $Q=(X+c)(X+1)$.

Déterminons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant cette relation.
Comme $c\in D$ on a $n+c\neq 0$ pour tout entier naturel n, donc la relation peut se réécrire :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\frac{a+n}{(c+n)(n+1)}u_n.$$

Par récurrence, on obtient :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(a+k)}{\prod_{k=0}^{n-1}(c+k)\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)}u_0=\frac{[a]_n}{[c]_n n!}u_0.$$

Réciproquement, on vérifie facilement que toute suite de cette forme vérifie bien la relation de récurrence ci-dessus.

Pour valider le raisonnement, il faut encore vérifier que la série entière $\sum_{n\geqslant 0}u_0\frac{[a]_n}{[c]_n n!}x^n$ a un rayon de convergence R non nul.
Si a est un entier négatif ou nul alors $[a]_n=0$ pour tout $n\geqslant 1-a$ donc $R=+\infty$.
Si $a\in D$ alors $[a]_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\left|\frac{\frac{[a]_{n+1}}{[c]_{n+1}(n+1)!}}{\frac{[a]_n}{[c]_n n!}}\right|=\frac{a+n}{(c+n)(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n}{n^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Donc d'après la règle de D'Alembert, $R=+\infty$.
Ainsi, $R=+\infty>0$ dans tous les cas et comme les cœfficients de cette série entière vérifient la relation de récurrence, on en déduit que sa somme vérifie (III.1) sur $\mathbb{R}$ d'après les équivalences démontrées ci-dessus.

En conclusion, les fonctions développables en série entière et solutions de (III.1) sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{x\mapsto u_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[a]_n}{[c]_n}\frac{x^n}{n!}\text{ avec }u_0\in\mathbb{R}\text{ (fonction définie sur }\mathbb{R}).}$$

L'ensemble des solutions de (III.1) développables en série entière est donc :

$$\boxed{\text{la droite vectorielle, engendrée par l'application }x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[a]_n}{[c]_n}\frac{x^n}{n!}\text{, que l'énoncé note }M_{a,c}.}$$

21. Soit $x \in \mathbb{R}$. On trouve par le calcul que :

$$\boxed{L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = -x + 1, \quad L_2(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2\right), \quad L_3(x) = \frac{1}{6}\left(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6\right).}$$

22. Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$ et $g_n(x) = x^n$.
On a alors $\Phi_n = f \times g_n$ et d'après la formule de dérivation de Leibniz (les fonctions f et g_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g_n^{(n-k)}(x).$$

On a (par récurrence) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ et :

$$\forall \ell \in \mathbb{N} \text{ avec } \ell \leqslant n, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n^{(\ell)}(x) = n(n-1)\cdots(n-\ell+1)x^{n-\ell} = \frac{n!}{(n-\ell)!} x^{n-\ell}.$$

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} \frac{n!}{k!} x^k.$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \Phi_n^{(n)}(x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k.$$

Comme $\binom{n}{n} \frac{(-1)^n}{n!} \neq 0$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } L_n \text{ est polynômiale de degré } n \text{ et on a pour tout } x \in \mathbb{R},\ L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!}}_{c_{n,k}} x^k.}$$

23. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{\Phi_n^{(n)}(x) = n! e^{-x} L_n(x)}$$

et donc après dérivation de cette égalité, on obtient $\Phi_n^{(n+1)}(x) = -n! e^{-x} L_n(x) + n! e^{-x} L_n'(x)$ d'où :

$$\boxed{\Phi_n^{(n+1)}(x) = n! e^{-x}\left(L_n'(x) - L_n(x)\right).}$$

24. Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque qu'on a : $\boxed{\Phi_{n+1}(x) = x^{n+1} e^{-x} = x \cdot x^n e^{-x} = x \cdot \Phi_n(x).}$
En utilisant encore la formule de dérivation de Leibniz pour dériver $n+1$ fois le membre de droite de cette égalité, on obtient :

$$\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \binom{n+1}{0} x \Phi_n^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1} \Phi_n^{(n)}(x) = x \Phi_n^{(n+1)}(x) + (n+1) \Phi_n^{(n)}(x),$$

les dérivées de $x \mapsto x$ étant nulles au-delà de l'ordre 2.
Or, d'après la question précédente :

$$\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)! e^{-x} L_{n+1}(x)\ ,\ \Phi_n^{(n+1)}(x) = n! e^{-x}\left(L_n'(x) - L_n(x)\right) \text{ et } \Phi_n^{(n)}(x) = n! e^{-x} L_n(x).$$

En injectant ces égalités ci-dessus et en simplifiant les factorielles et exponentielles, on obtient :

$$(n+1) L_{n+1}(x) = x\left(L_n'(x) - L_n(x)\right) + (n+1) L_n(x) = (n+1-x) L_n(x) + x L_n'(x),$$

d'où après division par $n+1 \neq 0$:

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ L_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n(x) + \frac{x}{n+1} L_n'(x).}$$

25. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\Phi'_{n+1}(x) = -e^{-x}x^{n+1} + (n+1)e^{-x}x^n = -\Phi_{n+1}(x) + (n+1)\Phi_n(x).$$

En dérivant $n+1$ fois cette égalité, on obtient :

$$\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = \left(\Phi'_{n+1}\right)^{(n+1)}(x) = -\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) + (n+1)\Phi_n^{(n+1)}(x).$$

On peut exprimer ces différentes dérivées à l'aide de L_n et L_{n+1}, grâce à la question Q23.
On obtient, après simplification des exponentielles :

$$(n+1)!\left(L'_{n+1}(x) - L_{n+1}(x)\right) = -(n+1)!L_{n+1}(x) + (n+1)n!\left(L'_n(x) - L_n(x)\right).$$

Ou encore : $L'_{n+1}(x) - L_{n+1}(x) = -L_{n+1}(x) + L'_n(x) - L_n(x)$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x).}$$

26. Soit $x \in \mathbb{R}$. En dérivant l'identité de la question Q24, on a :

$$\begin{aligned} L'_{n+1}(x) &= -\frac{1}{n+1}L_n(x) + \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)L'_n(x) + \frac{1}{n+1}L'_n(x) + \frac{x}{n+1}L''_n(x) \\ &= -\frac{1}{n+1}L_n(x) + \left(1 + \frac{1-x}{n+1}\right)L'_n(x) + \frac{x}{n+1}L''_n(x). \end{aligned}$$

Mais on a aussi, d'après la question précédente : $L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x)$.
En confrontant ces deux expressions de $L'_{n+1}(x)$, on obtient :

$$L'_n(x) - L_n(x) = -\frac{1}{n+1}L_n(x) + \left(1 + \frac{1-x}{n+1}\right)L'_n(x) + \frac{x}{n+1}L''_n(x).$$

Regroupons les termes en $L_n(x)$ et $L'_n(x)$ et multiplions par $n+1$ cette équation. On obtient :

$$0 = (n+1-1)L_n(x) + (1-x)L'_n(x) + xL''_n(x),$$

ou encore :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0.}$$

27. D'après la question précédente, L_n est solution de (III.1) avec $a = -n$ et $c = 1 \in D$. C'est de plus une application développable en série entière, en tant qu'application polynomiale.
Donc, d'après la question 20, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $L_n = \alpha M_{-n,1}$.
On détermine la valeur de α en évaluant en 0. On a $M_{-n,1}(0) = 1$ et d'après la question Q22, on a : $L_n(0) = c_{n,0} = \binom{n}{0}\frac{(-1)^0}{0!} = 1$.
Par conséquent, l'égalité $L_n = \alpha M_{-n,1}$ donne $1 = \alpha$ quand on l'évalue en 0.
Ainsi :

$$\boxed{L_n = M_{-n,1} \text{ ce qui prouve que } L_n \text{ est une fonction hypergéométrique confluente.}}$$