DEVOIR SURVEILLÉ 4 - 08/01/25 - *Durée 4h*
Sujet 3 - Type X-ENS

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes :

- Pour tous entiers naturels m, n, on note $[\![m;n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $m \leqslant k \leqslant n$.
- Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ la factorielle de n. On convient que $0! = 1$.
- Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*, \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant n lignes et m colonnes. Si $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;m]\!]$, on note $[A]_{i,j}$ le coefficient de A appartenant à la i-ème ligne et à la j-ème colonne. La matrice transposée de A est notée ${}^tA \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et sa matrice conjuguée est notée $\bar{A} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Les coefficients de $\bar{A}$ sont donnés par
$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;m]\!], [\bar{A}]_{i,j} = \overline{[A]_{i,j}}.$$
On pose $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, et on note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant d'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sera noté $\det(A)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A^k la puissance k-ème de A et on convient que $A^0 = I_n$.
Quand $n = 1$, on identifie la matrice $A \in \mathscr{M}_1(\mathbb{K})$ à son unique coefficient $[A]_{1,1} \in \mathbb{K}$.
- Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*, P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de P. On convient que $P^{(0)} = P$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on désigne par $\mathbb{K}_n[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à n.

Dans toute la suite de cet énoncé, $n \geqslant 2$ **désigne un entier naturel.** Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Spec}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A et on pose
$$\varrho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\}.$$
On note $\mathscr{V}(A)$ l'ensemble
$$\mathscr{V}(A) = \left\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P \neq 0_{\mathbb{C}[X]} \text{ et } P(A) = 0_n\right\}$$
(c'est-à-dire l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non nuls et annulateurs de A).

Pour toute suite $u = (u_k)_{k \geqslant 0}$ de nombres complexes, on adopte les notations suivantes

— on note $R_u \in [0, +\infty]$ le rayon de convergence de la série entière $\sum u_k z^k$ et D_u son disque ouvert de convergence défini par
$$D_u = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_u\}$$

— pour tout $z \in D_u$, on note $U(z)$ (avec U lettre majuscule) la somme

$$U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^k.$$

— On convient que $u^{(0)} = u$ et on note $u^{(1)}$ la suite définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k^{(1)} = (k+1)u_{k+1},$$

Plus généralement pour tout entier naturel $m \geqslant 0$, on pose

$$u^{(m+1)} = \left(u^{(m)}\right)^{(1)}.$$

Pour tout $m \geqslant 0$ et tout $z \in D_{u^{(m)}}$ on pose

$$U^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^{(m)} z^k.$$

— Si $v = (v_k)_{k \geqslant 0}$ est une autre suite de nombres complexes, on note $u + v$ la suite $(u_k + v_k)_{k \geqslant 0}$ et $u \star v$ la suite $(w_k)_{k \geqslant 0}$ de terme général donné par

$$w_k = \sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i} \text{ pour tout } k \geqslant 0.$$

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est *compatible avec* u si

$$\varrho(A) < R_u.$$

On note $\mathbb{M}_n(u)$ l'ensemble de toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ compatibles avec u :

$$\mathbb{M}_n(u) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid \varrho(A) < R_u\}.$$

Les parties III et IV de cet énoncé sont majoritairement indépendantes.

Partie I : Préliminaires

Soit $u = (u_k)_{k \geqslant 0}$ une suite de nombres complexes.

(1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur R_u pour que $\mathbb{M}_n(u) = \emptyset$ et donner un exemple de u pour laquelle on a cette égalité.

(2) Montrer que $\mathbb{M}_n(u) \neq \{0_n\}$.

(3) Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes

  (i) $R_u = +\infty$,

  (ii) $\mathbb{M}_n(u) = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,

  (iii) $\mathbb{M}_n(u) \neq \emptyset$ et $\forall A \in \mathbb{M}_n(u), \forall B \in \mathbb{M}_n(u), A + B \in \mathbb{M}_n(u)$,

et donner un exemple de suite u vérifiant ces trois assertions et telle que $u_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(4) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes

  (i) $A \in \mathbb{M}_n(v)$ pour toute suite $v = (v_k)_{k \geqslant 0}$ de $\mathbb{C}$ vérifiant $R_v > 0$.

  (ii) A est nilpotente (c'est-à-dire il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_n$).

(5) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 0$, on a

$$D_{u^{(m)}} = D_u.$$

(6) Soit $v = (v_k)_{k\geqslant 0}$ une autre suite de nombres complexes. Montrer que

$$\mathbb{M}_n(u) \cap \mathbb{M}_n(v) \subset \mathbb{M}_n(u+v) \cap \mathbb{M}_n(u \star v).$$

(7) On suppose dans cette question que $0 < R_u \leqslant 1$. Soient $A \in \mathbb{M}_n(u)$ et $B \in \mathbb{M}_n(u)$ deux matrices symétriques telle que $AB = BA$. Montrer que $AB \in \mathbb{M}_n(u)$.

Partie II : Fonctions de matrices

Soit $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{M}_n(u) \neq \emptyset$. Soit $A \in \mathbb{M}_n(u)$.

(8) Montrer que $\mathscr{V}(A)$ est non vide.

(9) Soit

$$m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \exists P \in \mathscr{V}(A) \text{ avec } \deg(P) = k\}.$$

Montrer qu'il existe un et un seul polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant les trois conditions

(i) $p \in \mathscr{V}(A)$,

(ii) $\deg(p) = m$,

(iii) p unitaire.

On note désormais φ_A ce polynôme.

(10) Soit $P \in \mathscr{V}(A)$. Montrer que φ_A divise P.

(11) Montrer que les racines de φ_A dans $\mathbb{C}$ sont exactement les valeurs propres de A.

(12) Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ alors φ_A est à coefficients réels (c'est-à-dire $\varphi_A \in \mathbb{R}[X]$).

On note désormais $\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell$ les valeurs propres de A, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. On note $m_1 \geqslant 1, \cdots, m_\ell \geqslant 1$ les multiplicités de $\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell$ respectivement en tant que racines de φ_A. Ainsi on a

$$\varphi_A(X) = (X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_\ell)^{m_\ell}$$

avec

$$m = m_1 + \cdots + m_\ell.$$

(13) Montrer que l'application

$$T : P \in \mathbb{C}_{m-1}[X] \mapsto \left(P(\lambda_1), P'(\lambda_1), \cdots, P^{(m_1-1)}(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_\ell), P'(\lambda_\ell), \cdots, P^{(m_\ell-1)}(\lambda_\ell)\right) \in \mathbb{C}^m$$

est un isomorphisme et en déduire qu'il existe un et un seul polynôme $Q \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![1;\ell]\!], \forall k \in [\![0; m_i-1]\!], Q^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i).$$

Dans toute la suite, on pose

$$u(A) = Q(A).$$

(14) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $u(A) = P(A)$ si et seulement si

$$\forall i \in [\![1;\ell]\!], \forall k \in [\![0; m_i-1]\!], P^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i).$$

(15) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| < R_u$. Montrer que

$$u(\alpha I_n) = U(\alpha) I_n.$$

(16) On suppose dans cette question uniquement que $n = 2$. Déterminer $u(A)$ dans le cas suivant :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où α, β et γ sont des réels fixés avec $\alpha \neq \beta$ et $\{\alpha, \beta\} \subset D_u$. On exprimera les coefficients de $u(A)$ en fonction α, β et $\gamma, U(\alpha)$ et $U(\beta)$.

(17) Soit $B \in \mathbb{M}_n(u)$.

(a) Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$u(A) = R(A) \text{ et } u(B) = R(B).$$

(b) On suppose que $AB \in \mathbb{M}_n(u)$ et $BA \in \mathbb{M}_n(u)$. Montrer que

$$Au(BA) = u(AB)A.$$

(18) Soit $v = (v_k)_{k \geqslant 0}$ une autre suite de $\mathbb{C}$ telle que $A \in \mathbb{M}_n(v)$. On suppose dans cette question uniquement que les valeurs $\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell$ sont réelles. Montrer que

$$(u \star v)(A) = u(A)v(A)$$

(après avoir justifié que $A \in \mathbb{M}_n(u \star v)$).

Partie III : Cas de matrices diagonalisables

Soit $u = (u_k)_{k \geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{M}_n(u) \neq \emptyset$. Soit $A \in \mathbb{M}_n(u)$. On suppose dans toute cette partie que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et on note $\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell$ ses valeurs propres avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

(19) Montrer que

$$\varphi_A(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_\ell).$$

(20) Pour tout $k \in [\![1;\ell]\!]$ on définit le polynôme :

$$Q_k^A(X) = \prod_{j=1, j \neq k}^{\ell} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$$

(on notera que les polynômes Q_k^A dépendent de la matrice A).

(a) Montrer que

$$u(A) = \sum_{k=1}^{\ell} U(\lambda_k) Q_k^A(A).$$

(b) Montrer que pour tout $k \in [\![1;\ell]\!], Q_k^A(A)$ est une projection dont on précisera l'image et le noyau.

(c) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{\ell} Q_k^A(A) = I_n.$$

(21) Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Montrer que

$$u\left(BAB^{-1}\right) = Bu(A)B^{-1}.$$

(22) Soit $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale et $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible telles que $A = SDS^{-1}$.

(a) Montrer que $u(D)$ est diagonale et que

$$\forall i \in [\![1; n]\!], [u(D)]_{i,i} = U\left([D]_{i,i}\right).$$

(b) En déduire une expression de $u(A)$.

Partie IV : Application à des cas particuliers

Dans cette partie, on suppose que $n \geqslant 4$. Soit $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{C}$ vérifiant la condition $(C^\star)$ suivante :

$$R_u > 1 \quad (C^\star).$$

(23) Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice donnée par

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer le polynôme φ_H dans ce cas.

(b) Soit $A = H + \alpha I_n$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ est tel que $|\alpha| < R_u$. Montrer que

$$u(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U^{(k)}(\alpha)}{k!} H^k$$

et en déduire que

$$u(A) = \begin{pmatrix} U(\alpha) & \frac{U^{(1)}(\alpha)}{1!} & \frac{U^{(2)}(\alpha)}{2!} & \cdots & \frac{U^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} \\ 0 & U(\alpha) & \frac{U^{(1)}(\alpha)}{1!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{U^{(2)}(\alpha)}{2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{U^{(1)}(\alpha)}{1!} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & U(\alpha) \end{pmatrix}.$$

(24) Soit $G \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$G = Y\,{}^tZ$$

où $Y, Z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont deux vecteurs colonnes tels que ${}^tYY = {}^tZZ = 1$.

(a) Montrer que G est de rang 1 et donner son image.

(b) Montrer que 0 et ${}^tZY$ sont les seules valeurs propres de G.

(c) En déduire que $G \in \mathbb{M}_n(u)$.

(d) Déterminer φ_G quand ${}^tZY \neq 0$.

(e) En déduire que si ${}^tZY \neq 0$ alors

$$u(G) = U(0)I_n + \frac{U\left({}^tZY\right) - U(0)}{{}^tZY} G.$$

(f) Déterminer une expression simple de $u(G)$ quand ${}^tZY = 0$.

(25) Soit $F \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$[F]_{k,j} = \frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{(k-1)(j-1)} \text{ pour tout } (k,j) \in [\![1;n]\!]^2,$$

où

$$\omega = e^{-2\pi i/n}.$$

(ici i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$).

(a) Montrer que F est inversible et que $F^{-1} = \bar{F}$.

(b) Montrer que $F^2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(c) En déduire que $F^4 = I_n$ et que $F \in \mathbb{M}_n(u)$.

(d) En déduire que

$$\begin{aligned} u(F) =& \frac{1}{4}\left(U(1)\left(F+I_n\right) - U(-1)\left(F-I_n\right)\right)\left(F^2+I_n\right) \\ &+ \frac{i}{4}\left(U(i)\left(F+iI_n\right) - U(-i)\left(F-iI_n\right)\right)\left(F^2-I_n\right). \end{aligned}$$

(26) (a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}$ (avec pour convention $\binom{N}{k} = 0$ si $k > N$).
Vérifier que u satisfait la condition $(C^\star)$ et trouver une expression simple de $u(A)$ pour tout $A \in \mathbb{M}_n(u)$.

(b) On suppose que $u_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = p(1-p)^{k-1}$. Vérifier que u satisfait la condition $(C^\star)$ et montrer que

$$u(A) = p\left(I_n - (1-p)A\right)^{-1} A$$

pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_n(u)$ diagonalisable.