Corrigé de l'épreuve Mathématiques, X/ENS 2024, filière PSI.

Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : *ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.*
Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

Partie I : Préliminaires

(1) On a

$$\boxed{M_n(u) = \emptyset \Leftrightarrow R_u = 0}.$$

Cette équivalence découle de suite du fait que $\rho(A) \geq 0$ pour toute matrice A.
Si $\boxed{u = (n!)_{n\geq 0}}$, on a $R_u = 0$ et donc $M_n(u) = \emptyset$.

(2) Si $R_u = 0$, alors $M_n(u) = \emptyset \neq \{0_n\}$.
Si $R_u > 0$ la matrice $A = \dfrac{R_u}{2} I_n$ appartient à $M_n(u)$ donc $M_n(u) \neq \{0_n\}$.

(3) Les implications $\boxed{(i) \Rightarrow (ii) \text{ et } (ii) \Rightarrow (iii)}$ sont bien sûr évidentes.
Montrons $\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$. Comme $M_n(u) \neq \emptyset$, $R_u > 0$. Supposons par l'absurde que $R_u \in]0, +\infty[$. La matrice $A = \dfrac{R_u}{2} I_n \in M_n(u)$. On en déduit que $2A = A + A \in M_n(u)$. On a alors $\rho(2A) = 2\rho(A) = R_u < R_u$, ce qui est absurde.
La suite $\boxed{u = (1/n!)_{n\geq 0}}$ vérifie (i), (ii) et (iii).

(4) Rappelons que d'après Cayley-Hamilton, A est nilpotente si et seulement si $\rho(A) = 0$.
Montrons $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$. Soit A vérifiant (i). Soit $R > 0$. La suite $v = (1/R^n)_{n\geq 0}$ est de rayon R. On a donc $\rho(A) < R$. Ceci étant vrai pour tout $R > 0$, on en déduit que $\rho(A) = 0$, c'est-à-dire que A est nilpotente.
L'implication $\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ est immédiate avec le rappel précédent.

(5) D'après le cours, le rayon de convergence d'une série entière est égal à celui de toutes ses dérivées. On a donc $R_u = R_{u^{(m)}}$ pour tout m et donc $\boxed{D_u = D_{u^{(m)}}}$.

(6) D'après le cours sur les séries entières, $R_{u+v} \geq \min(R_u, R_v)$ et par produit de Cauchy, $R_{u\star v} \geq \min(R_u, R_v)$.
Si $A \in M_n(u) \cap M_n(v)$, on a $\rho(A) < R_u$ et $\rho(A) < R_v$ donc $\rho(A) < \min(R_u, R_v)$ et donc bien $A \in M_n(u+v) \cap M_n(u \star v)$.

(7) *L'hypothèse symétrique est bien étrange pour des matrices à coefficients complexes...Le résultat demandé étant vrai pour toutes matrices, nous ne l'utiliserons pas.*
Soient $A, B \in M_n(u)$. Comme A et B commutent, elles sont simultanément trigonalisables (résultat hors-programme). On en déduit que toute valeur propre de AB s'écrit comme produit d'une valeur propre de A et d'une valeur propre de B. On en déduit que

$$\rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B) \underset{R_u>0}{<} R_u^2 \underset{R_u\leq 1}{\leq} R_u.$$

Et donc $\boxed{AB \in M_n(u)}$.

Partie II : Fonctions de matrices

(8) L'application $f_A\ : \mathbb{C}[X] \to M_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X],\ f_A(P) = P(A)$$

est linéaire. Comme $\mathbb{C}[X]$ est de dimension infinie alors que $M_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, cette application n'est pas injective et son noyau n'est donc pas réduit à $0_{\mathbb{C}[X]}$. Ceci signifie que $\boxed{\mathcal{V}_A \text{ n'est pas vide}}$.
Argument alternatif : le théorème de Cayley-Hamilton implique que $\chi_A \in \mathcal{V}_A$.

(9) Soit $P \in \mathcal{V}_A$ de degré m et de coefficient dominant a_m. Alors $p = \dfrac{1}{a_m} P$ vérifie (i), (ii) et (iii). Ceci donne l'existence.
Soient p_1 et p_2 deux éléments de $\mathcal{V}_A$ vérifiant (i), (ii) et (iii). Alors $p_1 - p_2$ est degré $< m$ et annule la matrice A. Par minimalité de m, on en déduit que $p_1 - p_2 = 0$ et donc que $p_1 = p_2$, ce qui prouve l'unicité.

(10) Effectuons la division euclidienne de P par φ_A : $P = Q\varphi_A + R$ avec $\deg(R) < m$. On a alors $R(A) = 0$ et par minimalité de m à nouveau, on en déduit que $R = 0$ et donc que $\boxed{\varphi_A \text{ divise } P}$.

(11) D'après Cayley-Hamilton, φ_A divise le polynôme caractéristique χ_A de A : ceci montre que toute racine de φ_A est racine de χ_A et donc est une valeur propre de A.
Réciproquement, toute valeur propre de A est racine de tout polynôme annulateur de A, et donc en particulier est racine de φ_A.

(12) Si A est à coefficients réels, et si $\varphi_A = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, on a

$$0_n = \overline{\sum_{k=0}^{m} a_k A^k} \underset{A \in M_n(\mathbb{R})}{=} \sum_{k=0}^{m} \overline{a_k} A^k.$$

Le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \overline{a_k} X^k$ annule A et est unitaire de degré m. Il est donc égal à φ_A, ce qui montre que $\overline{a_k} = a_k$ pour tout k et donc que $\boxed{\varphi_A \in \mathbb{R}[X]}$.

(13) L'application T est linéaire par linéarité des applications d'évaluation et de dérivation. Comme $\dim \mathbb{C}_{m-1}[X] = m = \dim \mathbb{C}^m$, il suffit de montrer que T est injective. Or, si $P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$ vérifie $T(P) = 0$, alors P possède m racines en tenant compte des multiplicités. Etant de degré $\leq m - 1$, on en déduit que $P = 0$. Ainsi, $\boxed{T \text{ est un isomorphisme}}$.
Et le polynôme Q cherché est

$$\boxed{Q = T^{-1}\big(U(\lambda_1), \ldots, U^{(m_1-1)}(\lambda_1), \ldots, U^{(m_l-1)}(\lambda_l)\big)}.$$

(14) En utilisant la caractérisation de la multiplicité d'une racine en termes d'annulation de dérivées, on a par équivalence logique

$$\begin{aligned}
u(A) = P(A) \quad &\Leftrightarrow \quad (P - Q)(A) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \varphi_A \text{ divise } P - Q \\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, l]\!], \lambda_i \text{ est racine de } P - Q \text{ de multiplicité } \geq m_i \\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, l]\!],\ \forall k \in [\![0, m_i - 1]\!],\ (P - Q)^{(k)}(\lambda_i) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, l]\!],\ \forall k \in [\![0, m_i - 1]\!],\ P^{(k)}(\lambda_i) = Q^{(k)}(\lambda_i) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, l]\!],\ \forall k \in [\![0, m_i - 1]\!],\ P^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i).
\end{aligned}$$

(15) Posons $A = \alpha I_n$. Avec les notations précédentes, on a $\varphi_A = X - \alpha$ et $m = 1$. Le polynôme Q est donc le polynôme constant égal à $U(\alpha)$ et on en déduit que

$$\boxed{u(\alpha I_n) = Q(\alpha I_n) = U(\alpha) I_n}.$$

(16) La matrice A est triangulaire supérieure, diagonalisable car à valeurs propres simples et de polynôme caractéristique égal à $(X - \alpha)(X - \beta)$.
On déduit de (11) en particulier que $\varphi_A = (X - \alpha)(X - \beta)$ et $l = 2$. Le polynôme Q est donc l'unique polynôme de degré ≤ 1 qui coïncide avec U en α et en β. On a donc

$$\boxed{Q = \frac{U(\alpha) - U(\beta)}{\alpha - \beta} X + \frac{\alpha U(\beta) - \beta U(\alpha)}{\alpha - \beta}}.$$

Finalement,

$$\boxed{u(A) = \frac{U(\alpha)-U(\beta)}{\alpha-\beta}A + \frac{\alpha U(\beta)-\beta U(\alpha)}{\alpha-\beta}I_2 = \begin{pmatrix} U(\alpha) & \dfrac{\gamma\big(U(\alpha)-U(\beta)\big)}{\alpha-\beta} \\ 0 & U(\beta) \end{pmatrix}}.$$

(17) (a) Soient $(\lambda_i)_{1\leq i\leq l}$ les valeurs propres de A et $(m_i)_{1\leq i\leq l}$ leurs multiplicités comme racines de φ_A, soient $(\mu_j)_{1\leq i\leq l'}$ les valeurs propres de B et $(n_j)_{1\leq i\leq l'}$ leurs multiplicités comme racines de φ_B. D'après (14), un polynôme R vérifie $u(A) = R(A)$ et $u(B) = R(B)$ si et seulement si $R^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i)$ pour tout i et $k \leq m_i - 1$ ainsi que $R^{(k)}(\mu_j) = U^{(k)}(\mu_j)$ pour tout j et $k \leq n_j - 1$.
Si on suppose que A et B ont r valeurs propres communes et que l'on a ordonné les λ_i et les μ_j de sorte que $\lambda_i = \mu_i$ pour $1 \leq i \leq r$, et si on note $M_i = \max(m_i, n_i)$ pour $1 \leq i \leq r$ puis enfin $M = M_1+\cdots+M_r+m_{r+1}+\cdots+m_l+n_{r+1}+\cdots+n_{l'}$, alors l'application $\tilde{T} : \mathbb{C}_{M-1}[X] \to \mathbb{C}^M$ définie par

$$P \mapsto \tilde{T}(P) = \big(P(\lambda_1), \ldots, P^{(M_r-1)}(\lambda_r), P(\lambda_{r+1}), \ldots, P^{(m_l-1)}(\lambda_l), P(\mu_{r+1}), \ldots, P^{(n_{l'}-1)}(\mu_{l'})\big)$$

est un isomorphisme (même argument qu'en (13)) et il existe donc un unique $R \in \mathbb{C}_{M-1}[X]$ qui convient !
Un argument plus agréable est possible en écrivant une relation de Bezout entre $\varphi_A/\mathrm{pgcd}(\varphi_A, \varphi_B)$ et $\varphi_B/\mathrm{pgcd}(\varphi_A, \varphi_B)$ mais l'arithmétique des polynômes n'est pas au programme de la filière PSI.

(b) D'après (a) appliqué à AB et BA, il existe un polynôme $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ tel que

$$u(AB) = R(AB) \text{ et } u(BA) = R(BA).$$

En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$A(BA)^k = A(BA)\cdots(BA) = (AB)\cdots(AB)A = (AB)^k A,$$

il vient

$$\boxed{Au(BA) = AR(BA) = \sum_{k=0}^{d} a_k A(BA)^k = \sum_{k=0}^{d} a_k (AB)^k A = R(AB)A = u(AB)A}.$$

(18) D'après (6), on a $A \in M_n(u \star v)$.
Notons $w = u \star v$ et W la somme de la série entière correspondante, définie au moins pour $|z| < \min(R_u, R_v)$. Par produit de Cauchy, on a $W = UV$. Soient Q tel que $u(A) = Q(A)$ et R tel que $v(A) = R(A)$. On a donc $u(A)v(A) = Q(A)R(A) = (QR)(A)$. En utilisant (14) et la formule de Leibniz, il vient pour tout i et pour tout $k \leq m_i - 1$,

$$\begin{aligned} (QR)^{(k)}(\lambda_i) &\underset{\text{Leibniz}}{=} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} Q^{(j)}(\lambda_i) R^{(k-j)}(\lambda_i) \\ &\underset{(14)}{=} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} U^{(j)}(\lambda_i) V^{(k-j)}(\lambda_i) \\ &\underset{\text{Leibniz}}{=} (UV)^{(k)}(\lambda_i) \\ &\underset{\text{Cauchy}}{=} W^{(k)}(\lambda_i). \end{aligned}$$

En appliquant (14) à nouveau à w, on en déduit que

$$\boxed{(u \star v)(A) = (QR)(A) = u(A)v(A)}.$$

Partie III : Cas de matrices diagonalisables

(19) D'après (11), le polynôme $(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_l)$ divise φ_A. Mais comme A est diagonalisable, $(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_l)$ annule A et d'après (10), φ_A divise $(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_l)$. Ces deux polynômes étant unitaires, on en déduit que

$$\boxed{\varphi_A = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_l)}.$$

(20) (a) Avec les notations de la partie précédente, les m_i sont égales à 1 et (14) se reformule ainsi :

$$u(A) = P(A) \Leftrightarrow \forall i,\ P(\lambda_i) = U(\lambda_i).$$

Appliquons ceci à

$$P = \sum_{k=1}^{l} U(\lambda_k) Q_k^A(X).$$

On a (polynômes interpolateurs de Lagrange) pour tout i :

$$P(\lambda_i) = \sum_{k=1}^{l} U(\lambda_k)\delta_{i,k} = U(\lambda_i)$$

et donc bien $\boxed{u(A) = P(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{l} U(\lambda_k) Q_k^A(A)}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{C}^n$, que l'on décompose en une somme de vecteurs propres $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{l} x_i$ avec $x_i \in \mathrm{Ker}(A-\lambda_i\, I_n)$.

Si $k \neq i$, le facteur $X-\lambda_i$ est présent dans $Q_k^A(X)$ et donc $Q_k^A(A)(x_i) = 0$.

Reste à calculer $Q_i^A(A)(x_i)$ et pour simplifier l'écriture, supposons $i=1$. On a alors

$$\begin{aligned}
Q_1^A(A)(x_1) &= \left(\prod_{j=2}^{l} \frac{A-\lambda_j I_n}{\lambda_1-\lambda_j}\right)(x_1)\\
&= \left(\prod_{j=2}^{l-1} \frac{A-\lambda_j I_n}{\lambda_1-\lambda_j}\right)\frac{(A-\lambda_l I_n)(x_1)}{\lambda_1-\lambda_l}\\
&= \left(\prod_{j=2}^{l-1} \frac{A-\lambda_j I_n}{\lambda_1-\lambda_j}\right)\frac{(\lambda_1-\lambda_l)(x_1)}{\lambda_1-\lambda_l}\\
&= \left(\prod_{j=2}^{l-1} \frac{A-\lambda_j I_n}{\lambda_1-\lambda_j}\right)(x_1)\\
&\ \vdots\\
&= x_1.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{Q_k^A(A)(x) = x_k}$, ce qui montre que $Q_k^A(A)$ est la matrice du projecteur d'image égale à $\mathrm{Ker}(A-\lambda_k I_n)$ et de noyau égal à $\displaystyle\bigoplus_{j=1, j\neq k}^{l} \mathrm{Ker}(A-\lambda_j I_n)$.

(c) On a d'après (b) pour tout $x \in \mathbb{C}^n$,

$$x = \sum_{k=1}^{l} Q_k^A(A)(x),$$

ce qui montre de suite que

$$\boxed{I_n = \sum_{k=1}^{l} Q_k^A(A)}.$$

L'énoncé est me semble-t-il maladroit, un étudiant connaissant son cours sur les polynômes de Lagrange peut être surpris. En utilisant le fait que $(Q_1^A,\dots,Q_l^A)$ est une base de $\mathbb{C}_{l-1}[X]$, le polynôme 1 se décompose dans cette base suivant

$$\boxed{1=\sum_{k=1}^{l} Q_k^A(X)}$$

si bien que

$$I_n=\sum_{k=1}^{l} Q_k^A(A)$$

mais que l'on a plus généralement

$$\boxed{\forall M\in M_n(\mathbb{C}),\ I_n=\sum_{k=1}^{l} Q_k^A(M)}.$$

(21) La matrice BAB^{-1} ayant les mêmes valeurs propres que A, on a $BAB^{-1}\in M_n(u)$ si bien que la question a un sens.
Notons aussi que BAB^{-1} a même ensemble de polynômes annulateurs et donc que $\varphi_{BAB^{-1}}=\varphi_A$. Ainsi, si Q vérifie $u(A)=Q(A)$, on a aussi d'après (14), $u(BAB^{-1})=Q(BAB^{-1})$. Or, on a de façon classique $Q(BAB^{-1})=BQ(A)B^{-1}$ et tout ceci donne donc $\boxed{u(BAB^{-1})=Bu(A)B^{-1}}$.

(22) (a) Comme D est semblable à A, on a $\varphi_D=\varphi_A=(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_l)$ et $P\in\mathbb{C}[X]$ vérifie $u(D)=P(D)$ si et seulement si $P(\lambda_i)=U(\lambda_i)$ pour tout i. Or, $P(D)$ est aussi diagonale et $[P(D)]_{i,i}=P([D]_{i,i})$ si bien que pour un tel P,

$$\boxed{u(D)=P(D)=\mathrm{diag}(P([D]_{1,1}),\dots,P([D]_{n,n}))=\mathrm{diag}(U([D]_{1,1}),\dots,U([D]_{n,n}))}.$$

(b) A l'aide de (21), on en déduit que

$$\boxed{u(A)=Su(D)S^{-1}=S\,\mathrm{diag}(U([D]_{1,1}),\dots,U([D]_{n,n}))S^{-1}}.$$

Partie IV : Application à des cas particuliers

(23) (a) La matrice H est nilpotente d'indice n donc $\boxed{\varphi_H=X^n}$.

(b) D'après (a), on a $\varphi_A=(X-\alpha)^n$. D'après (14), un polynôme Q vérifie $u(A)=P(A)$ si et seulement si $P^{(k)}(\alpha)=U^{(k)}(\alpha)$ pour tout $k\le n-1$. Grâce à la formule de Taylor pour les polynômes, c'est le cas du polynôme $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{U^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$. On a donc

$$\boxed{u(A)=P(A)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{U^{(k)}(\alpha)}{k!}(A-\alpha I_n)^k=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{U^{(k)}(\alpha)}{k!}H^k}.$$

Le "en déduire" est immédiat connaissant la forme des puissances de H !

(24) *Maladresse d'énoncé : G est à coefficients réels.*

(a) La matrice G est de terme général $[G]_{i,j}=y_iz_j$. Elle est non nulle et toutes ses colonnes sont proportionnelles à Y. On en déduit que G est de rang 1 et que $\boxed{\mathrm{Im}(G)=\mathrm{Vect}(Y)}$.

(b) La matrice G étant de rang 1, 0 est valeur propre de multiplicité $\ge n-1$ (d'après le théorème du rang) et la "dernière" valeur propre est donnée par la trace : $\mathrm{tr}(G)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_iz_i={}^tZY$.

(c) D'après Cauchy-Schwarz, $|{}^tZY|^2\le {}^tZZ\,{}^tYY=1$ donc $\rho(G)\le 1<R_u$ et $\boxed{G\in M_n(u)}$.

(d) Si ${}^tZY\ne 0$, la matrice G est diagonalisable et d'après (19), $\boxed{\varphi_G=X(X-{}^tZY)}$.

(e) Le polynôme

$$P = U(0) + \frac{U({}^tZY) - U(0)}{{}^tZY} X$$

vérifie $P(0) = 0$ et $P({}^tZY) = U({}^tZY)$. D'après (14) à nouveau, il vient :

$$\boxed{u(G) = P(G) = U(0)I_n + \frac{U({}^tZY) - U(0)}{{}^tZY} G}.$$

(f) Quand ${}^tZY = 0$, la matrice G est nilpotente d'indice 2 et on a $\varphi_G = X^2$. De là, $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifie $P(G) = u(G)$ si et seulement si $P(0) = U(0)$ et $P'(0) = U'(0)$. On en déduit que

$$\boxed{u(G) = U(0)I_n + U'(0)G.}$$

(25) (a) Le terme général (k, j) de la matrice $F\overline{F}$ est égal à

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} \omega^{(k-1)(l-1)}\omega^{-(l-1)(j-1)} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} (\omega^{k-j})^{l-1}.$$

Si $k \neq j$, $\omega^{k-j} \neq 1$ et

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} (\omega^{k-j})^{l-1} = \frac{1 - (\omega^n)^{k-j}}{1 - \omega^{k-j}} = 0$$

et si $k = j$,

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} (\omega^{k-j})^{l-1} = 1.$$

On a donc $F\overline{F} = I_n$ et donc F est inversible et $\boxed{F^{-1} = \overline{F}}$.

(b) Le terme général (k, j) de la matrice F^2 est égal à

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} \omega^{(k-1)(l-1)}\omega^{(l-1)(j-1)} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} (\omega^{k+j-2})^{l-1}.$$

Comme précédemment, cette quantité est soit nulle, soit égale à 1 (suivant que $k+j-2$ est un multiple de n ou pas) si bien que $\boxed{F^2 \text{ est à coefficients dans } \{0,1\} \text{ donc à coefficients réels}}$.

(c) On a

$$\boxed{F^4 = F^2\overline{F^2} = F^2\overline{F}^2 = F^2 \times (F^{-1})^2 = I_n}.$$

On en déduit que les valeurs propres de F sont des racines 4-ièmes de l'unité, donc de module égal à $1 < R_u$, ce qui montre que $\boxed{F \in M_n(u)}$.

(d) Le polynôme $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$ étant annulateur de F et à racines simples, le polynôme φ_F divise $(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$ et toutes ses racines sont donc simples. Afin de calculer $u(F)$, il suffit de trouver un polynôme qui coïncide avec U en 1, -1, i et $-i$. Le polynôme

$$P = \frac{1}{4}\big(U(1)(X+1) - U(-1)(X-1)\big)(X^2+1) + \frac{i}{4}\big(U(i)(X+i) - U(-i)(X-i)\big)(X^2-1)$$

convient, ce qui donne le résultat.

On n'utilise pas le fait que F^2 soit à coefficients réels dans la mesure où il n'est pas utile d'avoir l'expression de φ_F pour calculer $u(F)$.

(26) (a) *L'énoncé n'introduit pas N et p.*

La suite u est nulle à partir d'un certain rang donc $\boxed{R_u = +\infty}$.

On a de plus

$$\forall z \in \mathbb{C},\ U(z) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} z^k = (q + pz)^N$$

avec $q = 1 - p$. Comme U est polynomiale, on peut prendre $P = U$ pour calculer $u(A)$ et on a donc

$$\boxed{\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ u(A) = U(A) = (pA + (1-p)I_n)^N}.$$

(b) On a $R_u = 1/q > 1$ avec $q = 1 - p$ et

$$\forall z \in D_u,\ \sum_{k \geq 1} q^{k-1} p z^k = \frac{pz}{1 - qz}.$$

Si A est diagonalisable et appartient à $M_n(u)$, ses valeurs propres sont de module $< 1/q$, donc celles de qA sont de module < 1 et $I_n - qA$ et bien inversible. On écrit enfin $A = PDP^{-1}$ et on peut appliquer (22)(b) :

$$\boxed{u(A) = P \operatorname{diag}\left(\frac{pd_i}{1 - qd_i}\right) P^{-1} = P \operatorname{diag}(pd_i)\, P^{-1} P \operatorname{diag}\left(\frac{1}{1 - qd_i}\right) P^{-1} = pA(I_n - qA)^{-1} = p(I_n - qA)^{-1} A}.$$