DM9 (Intégration)
À rendre le lundi 27 janvier

Exercice 1 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet (niveau 1)

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$

et de calculer sa valeur.
On considère la fonction $f : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}.$$

On définit également la fonction $u : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad u(x,t) = -\frac{x\sin(t) + \cos(t)}{1+x^2} e^{-xt}.$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leqslant |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaires

Q1. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction F par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t) \mathrm{d}t.$$

La fonction F est donc bien définie sur $]0, +\infty[$.

Q2. Soit $x \geqslant 0$. Montrer que $t \mapsto u(x,t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $]0, +\infty[$.

Partie II - Calcul de F sur $]0, +\infty[$

Q3. Déterminer la limite de F en $+\infty$.

Q4. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt} \mathrm{d}t.$$

Q5. En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Conclure que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Partie III - Conclusion

On considère les fonctions F_1 et F_2 définies par :

$$F_1(x) = \int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t.$$

Q6. Montrer que la fonction F_1 est bien définie et continue sur $[0,1]$.

Q7. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Q8. En déduire que F_2 est bien définie sur $[0,1]$ et que pour tout $x \in [0,1]$:

$$F_2(x) = \frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt.$$

Q9. Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0,1]$.

Q10. En déduire que la fonction F est bien définie et continue en 0.

En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

Exercice 2 : Le problème des moments (niveau 2)

Dans tout le problème, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, qui pourra être $[0,1]$ ou $[0,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$.
On dira qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est une densité (de probabilité) sur I si elle est **continue** et **positive** sur I, intégrable sur I et de masse 1 c'est-à-dire :

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on dira que le moment d'ordre n d'une densité est fini si $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur I, et on définit alors le moment d'ordre n par le réel :

$$m_n(f) = \int_I x^n f(x)\mathrm{d}x.$$

Dans tout le problème la densité gaussienne est la densité $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{1}$$

Dans ce problème, on va s'intéresser à la question suivante :

Une densité est-elle déterminée par l'ensemble de ses moments ?
Autrement dit, est-il vrai que si deux densités f et g ont tous leurs moments finis et $m_n(f) = m_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $f = g$ sur I ?

On va notamment voir que c'est faux si $I = [0,+\infty[$ (partie II) mais c'est vrai si $I = [0,1]$ (partie III).

I – Transformée de Fourier de la densité gaussienne

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on pose : $\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi}\varphi(t)\mathrm{d}t$, où φ est définie en (1).

1. Justifier que $\hat{\varphi}$ est correctement définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que $\hat{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{\varphi}'(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} t e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

3. Montrer que $\hat{\varphi}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à préciser.

4. Montrer que $\hat{\varphi}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
   Dans la suite et si besoin on admettra que ceci reste valable pour tout $\xi \in \mathbb{C}$.

II – Le problème des moments sur $[0, +\infty[$

Dans cette partie on considère $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

5. Montrer que f est bien une densité sur $[0, +\infty[$. On admettra que tous ses moments sont finis.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n f(x) \sin(2\pi \ln(x)) \mathrm{d}x$.

6. Montrer que : $I_n = \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{i(2\pi - in)u} e^{-\frac{1}{2}u^2} \mathrm{d}u \right)$, où $\operatorname{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du complexe z.

7. À l'aide de la partie I, en déduire que $I_n = 0$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g_\alpha(x) = \begin{cases} f(x)(1 + \alpha \sin(2\pi \ln(x))) & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

8. Déterminer un intervalle I non vide et non réduit à un point tel que pour tout $\alpha \in I$, f et g_α sont deux densités sur $[0, +\infty[$, distinctes et $m_n(g_\alpha) = m_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III – Le problème des moments sur $[0,1]$

On considère ici deux densités f et g sur $I = [0,1]$ et on suppose donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m_n(f) = m_n(g).$$

9. Montrer que, pour toute fonction polynomiale P, on a :
$$\int_0^1 (f(x) - g(x))P(x)\mathrm{d}x = 0.$$

On admet qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $f - g$ sur $[0,1]$ (pour la preuve, voir le DM4 Théorème de Stone-Weierstrass).

10. Montrer que : $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (f(x) - g(x))P_n(x)x = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2\mathrm{d}x.$

11. Montrer alors que $f = g$ sur $[0,1]$.

Exercice 3 : Une démonstration de la formule de Stirling (niveau 3)

On admet la valeur de l'intégrale de Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$$
Déterminer par récurrence I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a
$$I_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}} dx.$$
3. Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par
$$U := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 |\ t > 0 \text{ et } x > -t\},$$
et soit f la fonction définie sur U par
$$f(t,x) = t^2 \ln(1 + \frac{x}{t}) - tx.$$
   (a) Montrer que pour tout $(t,x) \in U$, on a :
   $$x \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad f(t,x) \leqslant -\frac{x^2}{2}.$$
   (b) Pour $x > 0$, montrer que l'on a
   $$\forall t \geqslant 1, \qquad f(t,x) \leqslant f(1,x).$$
   Pour cela, on pourra commencer par écrire $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ sous la forme $tF(x/t)$ pour une certaine fonction F que l'on étudiera.
4. Déduire des questions précédentes la formule de Stirling.