

# Variables aléatoires discrètes

Dans tout le chapitre,  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  désigne un espace probabilisé et  $E$  un ensemble quelconque.

## I Variables aléatoires discrètes

### I. A Loi d'une variable aléatoire discrète

#### Définition 1.1

Une **variable aléatoire discrète**  $X$  définie sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  et à valeurs dans  $E$  est une application  $X : \Omega \rightarrow E$  telle que :

- $X(\Omega)$  est au plus dénombrable ;
- $\forall x \in E, X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{T}$ .

**Remarques 1.2 :** • La seconde condition signifie que pour tout  $x \in E$ , l'ensemble  $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$  est un événement.

- Lorsque  $E \subset \mathbb{R}$ , on dit que  $X$  est une **variable aléatoire discrète réelle**.

#### Proposition 1.3

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  à valeurs dans  $E$ . Si  $A$  est une partie quelconque de  $E$ , alors  $X^{-1}(A)$  est un événement noté  $(X \in A)$  ou  $\{X \in A\}$ .

**Notation :** Si  $x \in E$ , on note  $(X = x)$  l'événement  $X^{-1}(\{x\})$ .

Si  $X$  est une variable aléatoire discrète réelle et  $x \in \mathbb{R}$ , on note :

- $(X \leq x) = (X \in ]-\infty; x])$ ,
- $(X \geq x) = (X \in [x; +\infty[)$ ,
- $(X < x) = (X \in ]-\infty; x[)$ ,
- $(X > x) = (X \in ]x; +\infty[)$ .

**Remarque 1.4 :** Les variables aléatoires finies vues en sup : sur un univers  $\Omega$  fini sont des variables aléatoires discrètes sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ .

#### Définition 1.5

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète, alors  $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$  est un système complet d'événements appelé **système complet d'événements associé à  $X$** .

#### Définition 1.6

Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  une variable aléatoire discrète.

L'application :

$$P_X : \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \rightarrow [0; 1] \\ A \mapsto P(X \in A) \end{array}$$

est une probabilité sur  $(E, \mathcal{P}(E))$  appelée **loi de probabilité de  $X$** .

**Remarque 1.7 :** La loi de  $X$  peut être définie sur un ensemble  $E$  contenant  $X(\Omega)$ .

#### Proposition 1.8

Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  une variable aléatoire discrète, la probabilité  $P_X$  est déterminée par la distribution de probabilité discrète  $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ , c'est à dire par la donnée de :

- l'ensemble au plus dénombrable  $X(\Omega)$  ;
- la probabilité de chaque événement élémentaire.

**Exemples 1.9 :** • On lance deux dés équilibrés et on appelle  $S$  la somme des résultats. Proposer une modélisation : un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ , une expression pour  $S$  et la distribution de probabilité discrète associée.

- On suppose que  $X$  est une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n + 1) = \frac{4}{n} P(X = n)$ .  
Donner une expression explicite de la loi de  $X$ .

**Notation :** Lorsque deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  à valeurs dans un même ensemble  $E$  ont la même loi, c'est à dire lorsque  $P_X = P_Y$ , on note  $X \sim Y$ .

**Remarque 1.10 :** La notation  $X \sim Y$  ne suppose pas que  $X$  et  $Y$  sont égales ou même qu'elles sont définies sur le même espace probabilisé.

**Exemple 1.11 :** On lance un dé rouge et on appelle  $X$  le résultat du dé, on lance un dé vert et on appelle  $Y$  le résultat du dé.

Les deux expériences peuvent être considérées séparément,  $X$  et  $Y$  sont définies sur des univers différents, mais  $X \sim Y$ .

### I. B Fonction d'une variable aléatoire discrète

Dans tout le reste du chapitre, toutes les variables aléatoires sont supposées discrètes.

#### Proposition 1.12

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète définie sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  à valeurs dans  $E$  et  $f : E \rightarrow F$ .

Alors  $f \circ X : \Omega \rightarrow F$  est une variable aléatoire discrète notée  $f(X)$ .

**Remarque 1.13 :** La loi de  $Y = f(X)$  est donnée par :

- $Y(\Omega) = f(X(\Omega))$  ;
- $\forall y \in Y(\Omega), P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega) | f(x)=y} P(X = x)$ .

**Proposition 1.14**

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes définies sur  $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, P_1)$  et  $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, P_2)$  à valeurs dans un même ensemble  $E$ .  
Si  $X \sim Y$  et  $f : E \rightarrow F$ , alors  $f(X) \sim f(Y)$ .

## I. C Loi conditionnelle

**Définition 1.15**

Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  une variable aléatoire discrète et  $A \in \mathcal{T}$  un événement non négligeable. Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(E) &\longrightarrow [0; 1] \\ B &\longmapsto P_A(X \in B) = \frac{P(A \cap (X \in B))}{P(A)} \end{aligned}$$

est une probabilité sur  $(E, \mathcal{P}(E))$  appelée **loi conditionnelle de  $X$  sachant  $A$** .

## II Couple et famille de variables aléatoires discrètes

### II. A Couple de variables aléatoires discrètes

**Définition 2.1**

Soit  $X, Y$  des variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  à valeurs dans  $E$  et  $F$  respectivement.

Alors :

$$\begin{aligned} W &: \Omega \longrightarrow E \times F \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

est une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $E \times F$ , appelée **couple de variables aléatoires  $(X, Y)$** .

**Exemple 2.2 :** On lance deux dés. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au plus petit résultat des deux dés et  $Y$  au plus grand. Alors  $(X, Y)$  est un couple de variables aléatoires. Donner  $(X, Y)(\Omega)$ .

**Remarque 2.3 :** On n'a pas toujours :  $(X, Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$ , et dans ce cas certains des événements  $((X = x) \cap (Y = y))$  sont impossibles. On pourra tout de même donner la loi d'une telle variable aléatoire sur  $X(\Omega) \times Y(\Omega)$  quitte à compléter par des 0.

**Définition 2.4**

Soit  $X, Y$  des variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  à valeurs dans  $E$  et  $F$  respectivement. On appelle

**Loi conjointe du couple :** la loi de la variable aléatoire  $(X, Y)$  ;

**Lois marginales du couple :** les lois des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ .

**Remarque 2.5 :** La loi conjointe du couple est donc la donnée de :

- $(X, Y)(\Omega)$
- $\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), P(X = x, Y = y)$

**Méthode 2.6**

Si l'on connaît la loi de  $X$  et les lois conditionnelles de  $Y$  sachant les événements  $(X = x)$  pour chaque  $x \in X(\Omega)$ , on retrouve la loi conjointe du couple par \_\_\_\_\_.

**Exemple 2.7 :** On effectue 2 tirages successifs et sans remise dans une urne qui contient 2 boules blanches et une boule noire. On note  $X$  (respectivement  $Y$ ) la variable aléatoire égale à 1 lorsque la première (respectivement la seconde) boule tirée est blanche et à 0 sinon.

Déterminer la loi conjointe du couple  $(X, Y)$ .

**Théorème 2.8 (Lois marginales à partir de la loi conjointe)**

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes. On a

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$

**Exemple 2.9 :** Déterminer la loi de la variable aléatoire  $Y$  de l'exemple précédent.

**Remarque 2.10 :** On peut étendre les notions de loi conjointe et loi conditionnelles pour un  $n$ -uplet de variables aléatoires discrètes.

## II. B Variables aléatoires indépendantes

### Définition 2.11

Deux  $X$  et  $Y$  variables aléatoires discrètes définies sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  à valeurs dans  $E$  et  $F$  sont dites indépendantes, et on note  $X \perp Y$ , lorsque :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(F), P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B).$$

### Proposition 2.12

Deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  à valeurs dans  $E$  et  $F$  sont indépendantes si et seulement si la distribution de probabilité du couple  $(X, Y)$  est le produit des distributions de probabilité de  $X$  et de  $Y$  :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y).$$

### Proposition 2.13

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors, pour toute fonction  $f$  définie sur  $X(\Omega)$  et toute fonction  $g$  définie sur  $Y(\Omega)$ , les variables aléatoires  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.

### Définition 2.14 (famille finie de variables aléatoires indépendantes)

Les variables aléatoires discrètes  $X_1, \dots, X_n$  à valeurs dans  $E_1, \dots, E_n$  sont dites **indépendantes** lorsque, pour tout  $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n)$ , les événements  $(X_1 \in A_1), \dots, (X_n \in A_n)$  sont indépendants.

**Remarques 2.15 :** • Toute sous famille d'une famille de variables aléatoires indépendante est indépendante.

- Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables indépendantes et  $f_1, \dots, f_n$  sont des fonctions définies sur  $X_1(\Omega), \dots, X_n(\Omega)$ , alors  $f(X_1), \dots, f(X_n)$  sont indépendantes.

**Attention :** L'indépendance implique l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fautive.

### Théorème 2.16 (Lemme des coalitions)

Si les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, les variables aléatoires  $f(X_1, \dots, X_p)$  et  $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$  sont indépendantes.

**Remarque 2.17 :** On peut créer plus de deux coalitions.

## II. C Suites de variables aléatoires indépendantes

### Définition 2.18 (famille quelconque de VA indépendantes)

Une famille quelconque  $(X_i)_{i \in I}$  de variables aléatoires discrètes définies sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  est dite indépendante lorsque pour toute partie finie  $J$  de  $I$ , la sous famille  $(X_i)_{i \in J}$  est indépendante.

**Remarque 2.19 :** Si  $(X_i)_{i \in I}$  sont des variables indépendantes et  $(f_i)_{i \in I}$  sont des fonctions définies sur  $X_i(\Omega), \dots$ , alors  $(f_i(X_i))_{i \in I}$  sont indépendantes.

### Théorème 2.20

Pour toute suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de lois de probabilités discrètes, il existe un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  et une suite de variables aléatoires discrètes, indépendantes sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la loi de la variable aléatoire  $X_n$  est  $P_n$ .

**Remarque 2.21 :** En particulier, si  $P$  est une loi de probabilité discrète, il existe un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  et une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de variables aléatoires discrètes indépendantes telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la loi de  $X_n$  est  $P$ . On dit alors que les variables aléatoires sont indépendantes identiquement distribuées (abrégé en i.i.d.).

**Exemple 2.22 :** Si  $P$  est la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , on obtient une modélisation du jeu de pile ou face ou toute autre suite d'épreuve de type succès-échec indépendantes.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n$  est la variable aléatoire égale à 1 en cas de succès à la  $n^{\text{ième}}$  épreuve et à 0 en cas d'échec et les  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont indépendantes.

## III Lois usuelles

### III. A Loi uniforme

#### Définition 3.1

Soit  $X$  une variable aléatoire finie. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On dit que  $X$  **suit la loi uniforme sur**  $\llbracket 1; n \rrbracket$  et on note  $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$  lorsque :

- $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$  ;
- $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(X = k) = \frac{1}{n}$

#### Schéma type

$X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$  avec équiprobabilité.

**Exemple 3.2 :** Résultat d'un lancer de dé équilibré.

### III. B Loi de Bernoulli

#### Définition 3.3

Soit  $X$  une variable aléatoire finie et  $p \in ]0; 1[$ .

On dit que  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$  et on note  $X \sim \mathcal{B}(p)$  lorsque :

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$  ;
- $P(X = 1) = p$  et  $P(X = 0) = 1 - p$ .

#### Schéma type

On considère une épreuve Bernoulli c'est à dire une expérience aléatoire dont l'exécution amène soit un succès (événement  $S$ ) soit un échec (événement  $\bar{S}$ ) ; on note  $p = P(S)$ .

$X$  est la v.a. finie définie par 
$$X = \begin{cases} 1 & \text{si } S \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Remarque 3.4 :** La variable aléatoire  $X$  est alors la fonction indicatrice de l'ensemble  $S$  :  $X = \mathbb{1}_S$ .

### III. C Loi binomiale

#### Définition 3.5

Soit  $X$  une variable aléatoire finie. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0; 1[$ .

On dit que  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  et on note  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  lorsque :

- $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$  ;
- $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ .

#### Schéma type

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé.

- On répète  $n$  fois ( $n$  fixé) une épreuve de Bernoulli ;
- la probabilité de  $S$  (succès) reste identique à chaque réalisation de l'épreuve ;
- les réalisations successives de l'épreuve sont indépendantes ;
- $X$  est la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus lors de ces  $n$  épreuves.

**Exemple 3.6 :** On lance 3 fois un dé équilibré et on note  $X$  le nombre de 6 obtenus. Déterminer la loi de  $X$ .

**Remarques 3.7 :**

- On connaît le nombre de réalisations de l'épreuve à l'avance.

- Si  $n = 1$ , on retrouve la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .
- On peut en déduire la formule du binôme de Newton dans le cas où  $a > 0$  et  $b > 0$  en posant  $p = \frac{a}{a+b}$ .

#### Proposition 3.8

Soit  $n \in \mathbb{N}^*, p \in ]0; 1[$  et  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires discrètes indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

Alors  $X = X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

### III. D Loi géométrique

#### Définition 3.9

Soit  $p \in ]0; 1[$ , on pose  $q = 1 - p$ . On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$  et on note  $X \sim \mathcal{G}(p)$  lorsque :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  ou  $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$  ;
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = pq^{k-1}$ .

#### Schéma type

On considère une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès  $p \in ]0; 1[$  et  $X$  est le rang du premier succès ( $+\infty$  s'il n'y a aucun succès).

**Exemples 3.10 :**

- Dans un jeu de pile ou face infini avec un pièce qui donne pile avec probabilité  $p \in ]0; 1[$ , le rang  $X$  du premier pile est une variable géométrique de paramètre  $p$ .

- Pour la même expérience aléatoire, on note  $Y$  le rang du deuxième pile. Déterminer la loi conjointe de  $X$  et  $Y$  et en déduire la loi de  $Y$ .

### III. E Loi de Poisson

#### Définition 3.11

Soit  $\lambda > 0$ . On dit qu'une variable aléatoire discrète  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  et on note  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  lorsque :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$  ;
- $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ .

### Proposition 3.12

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires discrètes telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n$  suit la loi binomiale de paramètres  $(n, p_n)$ . Si :  $n \times p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ , alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

**Remarques 3.13 :** • Si la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $(n, p)$  avec  $n$  grand et  $\lambda = n \times p$  « pas trop grand », on peut approcher la loi de  $X$  par la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  (événements rares).

- La loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  est souvent utilisée pour décrire le nombre d'événements dans un intervalle de temps lorsque ces événements sont indépendants et qu'il y en a  $\lambda$  en moyenne.

**Exemple 3.14 :** Nombre d'appels reçus entre 15h et 16h par un standard téléphonique : il y a un grand nombre de personnes qui peuvent appeler, mais chacune avec une probabilité faible. On sait qu'en moyenne le standard reçoit 20 appels par heures.

**Remarque 3.15 :** Une loi conditionnelle peut être une loi usuelle.

**Exemple 3.16 :** On suppose que le nombre de voitures arrivant à un péage autoroutier en une heure suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda \in ]0; +\infty[$ , il y a  $k$  caisses et on suppose que chaque voiture choisit aléatoirement et indépendamment des autres une des caisses. Déterminer la loi de la variable aléatoire donnant le nombre de voitures qui passent à la caisse numéro 1 en une heure.

## IV Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

### IV. A Définitions et propriétés

#### Définition 4.1 (Espérance d'une VA positive)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ . L'espérance de  $X$ , notée  $E(X)$  est la somme dans  $[0; +\infty]$  de la famille  $(x P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

**Remarque 4.2 :** Par convention, si  $P(X = +\infty) = 0$ , alors  $+\infty \times P(X = +\infty) = 0$ .

### Proposition 4.3

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , alors :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n).$$

### Définition 4.4

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On dit que  $X$  est **d'espérance finie** lorsque la famille  $(x P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable.

Dans ce cas, on appelle **espérance de  $X$**  la somme de cette famille :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

**Notation :** On note  $X \in L^1$  lorsque  $X$  est une variable aléatoire discrète réelle ou complexe d'espérance finie.

**Remarques 4.5 :** • Soit  $X$  une variable aléatoire discrète. Si  $X$  est positive, alors elle possède une espérance finie ou infinie. Si  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  alors soit elle a une espérance finie, soit elle n'a pas d'espérance.

- Si  $X$  est une variable aléatoire fini (en particulier si  $\Omega$  est fini), alors  $X$  a une espérance finie.

### Définition 4.6

Une variable aléatoire discrète est dite **centrée** lorsqu'elle est d'espérance finie et que son espérance est nulle.

**Exemples 4.7 :** • Espérance des loi usuelles finies.

- On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_n = \frac{1}{n(n+1)}$ . Alors  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une distribution de probabilité discrète. Une variable aléatoire discrète  $X$  de loi associée à cette distribution de probabilité a-t-elle une espérance ?

### IV. B Espérance des lois usuelles

#### Proposition 4.8

Si une variable aléatoire discrète  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0; 1[$ , alors  $X$  a une espérance finie et  $E(X) = \frac{1}{p}$ .

#### Proposition 4.9

Si une variable aléatoire discrète  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ , alors  $X$  a une espérance finie et  $E(X) = \lambda$ .

## IV. C Propriétés de l'espérance

### Théorème 4.10 (Formule de transfert)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète et  $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ .  
La variable aléatoire  $f(X)$  est d'espérance finie si et seulement si la famille  $(f(x)P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable et dans ce cas :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X=x).$$

**Remarques 4.11 :** • La formule de transfert permet le calcul de l'espérance de  $f(X)$  sans avoir à déterminer sa loi, il suffit de connaître la loi de  $X$ .

- Si  $f$  est définie sur un ensemble  $E$  qui contient  $X(\Omega)$ , on peut remplacer la famille  $(f(x)P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$  par la famille  $(f(x)P(X=x))_{x \in E}$  (on ajoute des éléments nuls).
- Dans ce théorème  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , mais  $X$  est une variable aléatoire discrète quelconque, elle peut en particulier être un couple de variables aléatoires discrètes (cf espérance du produit).

### Théorème 4.12 (Inégalité triangulaire)

Soit  $X$  est une variable aléatoire discrète complexe.  
Alors  $X$  est d'espérance finie si et seulement si  $|X|$  est d'espérance finie et dans ce cas :

$$|E(X)| \leq E(|X|).$$

### Proposition 4.13

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes, respectivement complexes et positives telles que  $|X| \leq Y$ .  
Si  $Y$  est d'espérance finie, alors  $X$  est d'espérance finie.

### Théorème 4.14 (Linéarité de l'espérance)

Soit  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires discrètes complexes d'espérance finie et  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , alors la variable aléatoire  $\lambda X + \mu Y$  est d'espérance finie et :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

### Proposition 4.15 (Positivité de l'espérance)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète positive, alors :  $E(X) \geq 0$ .  
De plus, si  $X$  est positive et  $E(X) = 0$ , alors  $X = 0$  presque sûrement.

### Proposition 4.16 (Croissance de l'espérance)

Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires réelles discrètes d'espérance finie telles que  $X \leq Y$ . Alors :

$$E(X) \leq E(Y).$$

De plus si  $E(X) = E(Y)$ , alors  $X = Y$  presque sûrement.

**Attention :** Soit  $X, Y$  sont deux variables aléatoires réelles discrètes :

$X \leq Y$  et  $Y$  est d'espérance finie  $\not\Rightarrow X$  est d'espérance finie.

### Théorème 4.17 (Espérance du produit de variables indépendantes)

Soit  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires discrètes complexes **indépendantes** et d'espérance finie.

Alors  $XY$  est d'espérance finie et :

$$E(XY) = E(X) \times E(Y).$$

Généralisation à  $n$  variables aléatoires indépendantes.

### Proposition 4.18

Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires discrètes complexes d'espérance finie et indépendantes.

Alors  $\prod_{k=1}^n X_k$  est d'espérance finie et :

$$E\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n E(X_k)$$

## V Variance d'une variable aléatoire réelle

Dans cette section, les variables aléatoires sont réelles.

### V. A Définition et propriétés

#### Proposition 5.1

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète réelle.  
Si  $X^2$  est d'espérance finie, alors  $X$  est d'espérance finie.

**Notation :** On note  $X \in L^2$  lorsque  $X$  est une variable aléatoire discrète réelle telle que  $X^2$  est d'espérance finie.

### Théorème 5.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires discrètes réelles, si  $X$  et  $Y$  sont dans  $L^2$ , alors  $XY$  est dans  $L^1$  et :

$$E(XY)^2 \leq E(X^2) \times E(Y^2)$$

avec égalité si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $X = \lambda Y$  ou  $Y = \lambda X$  presque sûrement.

### Définition 5.3

Soit  $X \in L^2$ , on appelle **variance** de  $X$  le réel positif :

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

**Remarque 5.4 :** La variance mesure la dispersion de  $X$  par rapport à sa moyenne.

### Proposition 5.5

Soit  $X \in L^2$ ;  $V(X) = 0$  si et seulement si  $X$  est constante presque sûrement, i.e. si et seulement si il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $P(X = a) = 1$ .

### Théorème 5.6 (Formule de Koenig-Huygens)

Soit  $X \in L^2$  :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

### Proposition 5.7

Soit  $X \in L^2$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ , alors  $aX + b \in L^2$  et :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

### Définition 5.8

Soit  $X \in L^2$ , on appelle **écart type** de  $X$  le réel positif  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

### Définition 5.9

Soit  $X \in L^2$ , on dit que  $X$  est réduite lorsque  $V(X) = 1$ .

### Proposition 5.10

Soit  $X \in L^2$ , si  $\sigma(X) > 0$ , alors la variable aléatoire  $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  est centrée réduite.

## V. B Variance de lois usuelles

### Proposition 5.11

Si une variable aléatoire discrète  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0; 1[$ , alors  $X \in L^2$  et  $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$ .

### Proposition 5.12

Si une variable aléatoire discrète  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ , alors  $X \in L^2$  et  $V(X) = \lambda$ .

## V. C Covariance

### Définition 5.13

Soit  $X$  et  $Y$  dans  $L^2$ . Alors  $(X - E(X))(Y - E(Y)) \in L^1$  et on appelle **covariance** de  $X$  et  $Y$  le réel :

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

**Remarque 5.14 :** Pour  $X \in L^2$ ,  $\text{Cov}(X, X) = V(X)$ .

### Théorème 5.15 (Formule de Koenig-Huygens)

Soit  $X$  et  $Y$  dans  $L^2$ , alors :

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

### Proposition 5.16

Si  $X$  et  $Y$  sont dans  $L^2$  et sont indépendantes, alors  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

**Remarque 5.17 :** La réciproque est fautive.

**Contre exemple 5.18 :** Soit  $X$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $\{-1, 0, 1\}$  et  $Y$  la variable aléatoire indicatrice de l'événement  $(X = 0)$ . Alors  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes ( $(X = 0)$  et  $(Y = 0)$  ne sont pas indépendants) mais décorrélées.

### Définition 5.19

Deux variable aléatoire  $X$  et  $Y$  sont dites **décorrélées** lorsqu'elles sont dans  $L^2$  et que leur covariance est nulle.

## V. D Variance d'une somme

### Théorème 5.20

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  dans  $L^2$ , alors la variable aléatoire  $X_1 + \dots + X_n$  est dans  $L^2$  et :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

### Proposition 5.21

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  dans  $L^2$  deux à deux décorrélées, alors la variable aléatoire  $X_1 + \dots + X_n$  est dans  $L^2$  et :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k).$$

**Remarque 5.22 :** La formule est vraie en particulier si les variables aléatoires sont deux à deux indépendantes, et a fortiori si elles sont indépendantes.

## VI Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres

### VI. A Inégalités probabilistes

#### Théorème 6.1 (Inégalité de Markov)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète réelle positive d'espérance finie et  $a > 0$ , alors :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

#### Théorème 6.2 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète réelle dans  $L^2$  et  $\varepsilon > 0$ , alors :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

**Remarque 6.3 :** On retrouve le fait que la variance mesure la dispersion de la variable aléatoire.

## VI. B Loi faible des grands nombres

### Théorème 6.4 (Loi faible des grands nombres)

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires discrètes réelles i.i.d. (indépendantes de même loi) sur le même espace probabilisé et de variance finie.

On pose  $m = E(X_1)$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

**Remarque 6.5 :** La loi faible des grands nombres fait le lien entre la moyenne théorique  $E(X_1)$  et les moyennes observables pour  $n$  répétitions.

## VII Fonctions génératrices

### VII. A Définition et propriétés

#### Définition 7.1

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , on appelle **fonction génératrice de  $X$**  la fonction  $G_X$  de la variable réelle définie par :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$

**Remarque 7.2 :** D'après la formule de transfert, pour  $t \in \mathbb{R}$  la variable aléatoire  $t^X$  a une espérance finie si et seulement si la famille  $(t^n P(X = n))_{n \in X(\Omega)}$  est sommable et dans ce cas,

$$E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$

#### Proposition 7.3

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

La série entière  $\sum P(X = n)t^n$

- est de rayon de convergence supérieur (ou égal) à 1 ;
- elle converge normalement sur  $[-1; 1]$  ;
- $G_X$  est continue sur  $[-1; 1]$ .
- $G_X$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur son disque ouvert de convergence.

**Remarque 7.4 :** Si  $X$  est une variable aléatoire finie à valeurs entières, alors  $G_X$  est une fonction polynomiale.

**Proposition 7.5**

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , alors la loi de  $X$  est déterminée de manière unique par  $G_X$ . Plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}.$$

Deux variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  ont la même loi si et seulement si elles sont la même fonction génératrice.

**Théorème 7.6**

Une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est d'espérance fini si et seulement si  $G_X$  est dérivable en 1 et dans ce cas :

$$E(X) = G'_X(1).$$

**Proposition 7.7**

Une  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est dans  $L^2$  si et seulement si  $G_X$  est deux fois dérivable en 1 et dans ce cas,  $G''(1) = E(X(X-1))$ .

**Corollaire 7.8**

Si la fonction génératrice d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est deux fois dérivable en 1, alors  $X \in L^2$  et :

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2.$$

**VII. B Fonctions génératrices des lois usuelles**

Les formules ne sont pas nécessairement à connaître, mais à savoir calculer rapidement.

- Si  $X \sim \mathcal{B}(p)$ , alors  $G_X(t) = q + pt$ .  
Donc, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $G'_X(t) = p$  et  $G''_X(t) = 0$   
et on retrouve,  $E(X) = p$ ,  $V(X) = p(1-p)$ .
- Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ , variable aléatoire finie, donc  $G_X$  définie sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $G_X(t) = (q + pt)^n$ .  
D'où,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $G'_X(t) = np(q + pt)^{n-1}$ ,  $G''_X(t) = n(n-1)p^2(q + pt)^{n-2}$ .  
Et :  $E(X) = np$ ,  $V(X) = np(1-p)$ .
- Si  $X \sim \mathcal{G}(p)$ , la série  $\sum P(X = n)t^n = \sum_{n \geq 1} pt(qt)^{n-1}$  a pour rayon de convergence  $R = \frac{1}{q} > 1$  et

$$\forall t \in ]-R; R[, G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}$$

et  $\forall t \in ]-R; R[$ ,

$$G'_X(t) = \frac{p}{(1-qt)^2} \text{ et } G''_X(t) = \frac{2pq}{(1-qt)^3}$$

Donc :

$$E(X) = G'_X(1) = \frac{1}{p}, \quad E(X(X-1)) = G''_X(1) = \frac{2q}{p^2} \text{ et } V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

- Si  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ , la série  $\sum P(X = n)t^n = \sum e^{-\lambda} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$  a pour rayon de convergence  $+\infty$  et  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$G_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}, G'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)} \text{ et } G''_X(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}.$$

D'où :  $E(X) = G'_X(1) = \lambda$ ,  $E(X(X-1)) = G''_X(1) = \lambda^2$  et  $V(X) = \lambda$ .

**VII. C Somme de variables aléatoires indépendantes****Théorème 7.9**

Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Alors, pour tout  $t$  tel que  $G_{X_k}(t)$  est défini pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,

$$G_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n G_{X_k}(t).$$

**Exemples 7.10 :** • Soit  $X_1, \dots, X_k$  des variables aléatoires indépendantes telles que :  $\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket, X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$  et  $X = \sum_{i=1}^k X_i$ . Montrer que  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  avec

$$n = \sum_{i=1}^k n_i.$$

- Soit  $X_1, \dots, X_k$  des variables aléatoires indépendantes telles que :  $\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket, X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$  et  $X = \sum_{i=1}^k X_i$ . Montrer que  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  avec  $\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i$ .

**Exemple 7.11 :** Montrer que l'on ne peut pas truquer deux dés à 6 faces pour que la somme suive une loi uniforme sur  $\llbracket 2; 12 \rrbracket$ .

**VIII Bilan lois usuelles**