L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel n, c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté p_n, est donnée en début de partie **B**. Dans la partie **A**, on introduit une fonction P de variable complexe ; dans la fin de la partie **B** on démontre qu'il s'agit de la somme, sur le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$, de la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n z^n$. L'étude de P au voisinage de 1 permet alors, dans les parties suivantes, de progresser vers l'obtention d'un équivalent simple de la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (formule asymptotique de Hardy et Ramanujan).

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$ sera noté

$$D = \{z \in \mathbf{C} : \ |z| < 1\}.$$

Dans tout l'énoncé, on utilisera la dénomination « variable aléatoire réelle » pour signifier « variable aléatoire discrète réelle ».

On admettra aussi les deux identités classiques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}.$$

A. Fonctions L et P

1 ▷ Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}\cdot$ Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1, 1[$. On notera

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\cdot$$

2 ▷ Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $t \in [0, 1] \mapsto L(tz)$ est dérivable et donner une expression simple de sa dérivée. En déduire que $t \mapsto (1 - tz)\, e^{L(tz)}$ est constante sur $[0, 1]$ et conclure que

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1 - z}\cdot$$

3 ▷ Montrer que $|L(z)| \leq -\ln(1 - |z|)$ pour tout z dans D. En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} L(z^n)$ pour tout z dans D. Dans la suite, on notera, pour z dans D,

$$P(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right].$$

On remarque, en vertu de la question précédente et des propriétés de l'exponentielle, que

$$\forall z \in D,\ P(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad P(z) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - z^n}\cdot$$

B. Développement de P en série entière

Pour $(n, N) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, on note $P_{n,N}$ l'ensemble des listes $(a_1, \dots, a_N) \in \mathbf{N}^N$ telles que $\sum\limits_{k=1}^{N} k a_k = n$. Si cet ensemble est fini, on note $p_{n,N}$ son cardinal.

4 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $P_{n,N}$ est fini pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, que la suite $(p_{n,N})_{N \geq 1}$ est croissante et qu'elle est constante à partir du rang $\max(n, 1)$.

Dans toute la suite, on notera p_n la valeur finale de $(p_{n,N})_{N \geq 1}$.

5 ▷ Montrer par récurrence que

$$\forall N \in \mathbf{N}^*,\ \forall z \in D,\ \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n.$$

6 ▷ Soit $z \in D$. On convient que $p_{n,0} = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. En examinant la sommabilité de la famille $((p_{n,N+1} - p_{n,N}) z^n)_{(n,N) \in \mathbf{N}^2}$, démontrer que

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n} p_n x^n$.

7 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout réel $t > 0$,

$$p_n = \frac{e^{nt}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\, P(e^{-t+i\theta})\, \mathrm{d}\theta,$$

si bien que

$$p_n = \frac{e^{nt} P(e^{-t})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\, \frac{P(e^{-t+i\theta})}{P(e^{-t})}\, \mathrm{d}\theta. \tag{1}$$

Dans le reste du problème, l'objectif est d'obtenir un équivalent du nombre p_n lorsque n tend vers $+\infty$. Cet équivalent sera obtenu via un choix approprié de t en fonction de n dans la formule (1).

C. Contrôle de P

8 ▷ Soit $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. En utilisant la fonction L, montrer que

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| \leq \exp\Big(-(1-\cos\theta)\,x\Big).$$

En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ et tout réel θ,

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big)\right).$$

9 ▷ Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big) \geq \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\Big((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta)\Big)}.$$

En déduire que

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right) \quad \text{ou que} \quad \left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

D. Intermède : quelques estimations de sommes

On fixe dans cette partie un réel $\alpha > 0$ et un entier $n \geq 1$. Sous réserve d'existence, on pose

$$S_{n,\alpha}(t) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n}.$$

On introduit aussi la fonction

$$\varphi_{n,\alpha} : x \in \mathbf{R}_+^* \mapsto \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n},$$

qui est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$.

10 ▷ Montrer que $\varphi_{n,\alpha}$ et $\varphi'_{n,\alpha}$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$.

11 ▷ Montrer, pour tout réel $t > 0$, l'existence de $S_{n,\alpha}(t)$, sa positivité stricte, et l'identité

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = t^{n+1} S_{n,\alpha}(t) - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\,\varphi'_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire que

$$S_{n,\alpha}(t) = \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n}\,\mathrm{d}x + O\Big(\frac{1}{t^n}\Big) \quad \text{quand } t \to 0^+.$$

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

— On note (x, y) (resp. $X^T Y$) le produit scalaire euclidien usuel de deux vecteurs x et y de $\mathbf{R}^n$ (resp. X et Y de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié canoniquement à $\mathbb{R}^n$) et $||x||$ la norme de x (resp. $||X||$ la norme de X) associée au produit scalaire.

— Etant donnés deux points P et P' de $\mathbf{R}^n$, on note $d(P, P')$ la distance entre P et P' associée à la norme euclidienne usuelle :

$$d(P, P') = ||\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'}||$$

où O est le point origine.

— Un endomorphisme symétrique f de $\mathbf{R}^n$ est dit *positif* si

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, (x, f(x)) \geq 0$$

Une matrice symétrique A de $M_n(\mathbb{R})$ est dite *positive* si

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0.$$

— Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$. Un endormorphisme symétrique f de $\mathbf{R}^n$ est positif si, et seulement si, sa matrice (symétrique) dans $\mathcal{B}$ est positive.

— On appelle *matrice de distance euclidienne* (on notera MDE pour abréger) une matrice carrée $D = (d_{i,j})$ d'ordre n telle qu'il existe un entier naturel non nul m et des points A_1, ... A_n de $\mathbf{R}^m$ tels que pour tout $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ on a :

$$d_{i,j} = d(A_i, A_j)^2.$$

On se propose dans ce sujet d'apporter une réponse partielle au problème consistant à déterminer, étant donnés des réels λ_1, ..., λ_n, une MDE de spectre $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

On admet sans démonstration dans ce sujet que des endomorphismes symétriques de $\mathbf{R}^n$ sont positifs si et seulement si leur spectre est inclus dans $[0, +\infty[$.

1 Matrices de Hadamard

On appelle *matrice de Hadamard* d'ordre n toute matrice H carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à -1 et telle que $\frac{1}{\sqrt{n}}H$ soit orthogonale.

1 ▷ Donner des exemples de matrices de Hadamard d'ordre 1 et 2.

2 ▷ Montrer que si H est une matrice de Hadamard alors toute matrice obtenue en multipliant une ligne ou une colonne de H par -1 ou en échangeant deux lignes ou deux colonnes de H est encore une matrice de Hadamard.

3 ▷ Montrer que si H est une matrice de Hadamard d'ordre n alors il existe une matrice de Hadamard d'ordre n dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1. En déduire que si $n \geq 2$ alors n est pair.

4 ▷ Montrer que si H est une matrice de Hadamard d'ordre n supérieur ou égal à 4, alors n est multiple de 4. On pourra commencer par montrer que l'on peut supposer la première ligne de H uniquement composée de 1 et sa deuxième ligne composée de $n/2$ coefficients égaux à 1 puis $n/2$ coefficients égaux à -1.

2 Quelques résultats sur les endomorphismes symétriques

Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbf{R}^n$. On note $\lambda_1 \leqslant ... \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres classées par ordre croissant de f. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on introduit l'ensemble π_k des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ de dimension k. On admettra ici que les min et max considérés existent bien (cela découle de la continuité des expressions considérés).

5 ▷ Justifier l'existence d'une base $(e_1, ..., e_n)$ orthonormée de $\mathbf{R}^n$ formée de vecteurs propres de f, le vecteur e_i étant associé à λ_i pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. On garde par la suite cette base.

6 ▷ Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et S_k un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension k. On pose $T_k = \mathrm{Vect}(e_k, ..., e_n)$.
Justifier que $S_k \cap T_k \neq \{0\}$.

7 ▷ En considérant $x \in S_k \cap T_k$, justifier que :

$$\max_{x \in S_k, ||x||=1} (x, f(x)) \geq \lambda_k.$$

8 ▷ Soit $k \in [\![1, n]\!]$. A l'aide de $S = \text{Vect}(e_1, ..., e_k) \in \pi_k$, montrer l'égalité :

$$\lambda_k = \min_{S \in \pi_k} \left(\max_{x \in S, ||x||=1} (x, f(x)) \right)$$

C'est le théorème de Courant-Fischer. On aura également besoin par la suite du résultat de factorisation suivant :

9 ▷ Soit M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que si M est positive, alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M = B^T.B$. En déduire que si M n'est plus supposée positive, mais admet une unique valeur propre strictement positive λ d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre unitaire u, alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M = \lambda u.u^T - B^T.B$.

3 Caractérisation des MDE

On note $\mathbf{e}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On note Δ_n l'ensemble des MDE d'ordre n et Ω_n l'ensemble des matrices M symétriques positives d'ordre n telles que $M.\mathbf{e} = 0$. On note enfin P la matrice d'ordre n définie par

$$P = I_n - \frac{1}{n}\mathbf{e}.\mathbf{e}^T$$

On note T l'application de Δ_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui à D associe

$$T(D) = -\frac{1}{2}PDP$$

et K l'application de Ω_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui à une matrice A associe

$$K(A) = \mathbf{e}.\mathbf{a}^T + \mathbf{a}.\mathbf{e}^T - 2A$$

où $\mathbf{a}$ est la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dont les coefficients sont les coefficients diagonaux de A.

10 ▷ Montrer que P est symétrique et que l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé est une projection orthogonale sur $\text{Vect}(\mathbf{e})^\perp$.

11 ▷ Soit $D \in \Delta_n$. Soient A_1, ... , A_n des points dont la matrice D est la matrice de distance euclidienne. On note x_i les vecteurs coordonnées des A_i. Soit M_A la matrice dont les colonnes sont les x_i et C la colonne formée des $||x_i||^2$. Ecrire D comme combinaison linéaire de $C\mathbf{e}^T$, $\mathbf{e}C^T$ et $M_A^T.M_A$. En déduire que pour toute matrice D de Δ_n on a $T(D) \in \Omega_n$.

12 ▷ Montrer que pour toute matrice A de Ω_n on a $K(A) \in \Delta_n$.

13 ▷ Montrer que les applications $T : \Delta_n \to \Omega_n$ et $K : \Omega_n \to \Delta_n$ vérifient :

$$T \circ K = \mathrm{Id}_{\Omega_n}.$$

On peut montrer (mais ce n'est pas demandé) que l'on a également $K \circ T = Id_{\Delta_n}$ et que ces deux applications sont bijections réciproques l'une de l'autre.

14 ▷ Montrer qu'une matrice symétrique D d'ordre n à coefficients positifs ou nuls et de diagonale nulle est MDE si et seulement si $-\frac{1}{2}PDP$ est positive.

15 ▷ Montrer que toute matrice symétrique à coefficients positifs, non nulle et de diagonale nulle, ayant une unique valeur propre strictement positive d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre $\mathbf{e}$ est MDE.

4 Spectre des MDE

On conserve ici les notations de la partie précédente.

16 ▷ Préciser la somme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ des valeurs propres d'une MDE d'ordre n.

17 ▷ Soit D une MDE d'ordre n non nulle. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Vect}(\mathbf{e})^{\perp}$, on a

$$x^T D x \leqslant 0.$$

18 ▷ Soit D une MDE d'ordre n non nulle. Soient λ_1, ... ,λ_n ses valeurs propres, ordonnées dans l'ordre croissant. Montrer

$$\lambda_{n-1} \leqslant 0$$

et en déduire que D a exactement une valeur propre strictement positive.

5 Problème inverse pour les MDE

Soit H une matrice de Hadamard d'ordre n et de première ligne constante égale à 1. Soient λ_1 , ..., λ_n des réels tels que

$$\lambda_1 > 0 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0.$$

On note U la matrice $\frac{1}{\sqrt{n}}H$ et Λ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les λ_i. On note enfin $D = U^T \Lambda U$.

19 ▷ Montrer que D est symétrique, à coefficients positifs et à diagonale nulle, et a pour valeurs propres λ_1, ..., λ_n, avec λ_1 d'espace propre de dimension 1.

20 ▷ Montrer que D est MDE.

21 ▷ Donner une matrice de distance euclidienne d'ordre 4 telle que son spectre soit $\{5, -1, -2, -2\}$.

Remarquons pour finir que la portée de ce résultat est à nuancer, car outre les conditions sur les ordres possibles pour les matrices de Hadamard, on ne sait même pas s'il existe de telles matrices pour tout ordre multiple de 4 ! D'autre part, il existe évidemment des matrices de distance euclidienne d'ordre impair...

Fin du problème