

Devoir Surveillé n° 5 sujet 1.

le 10 janvier.

Problème 1

Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

Q1. On considère une suite de réels (a_n) , une suite de complexes (b_n) et on note pour tout

entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

En remarquant que, pour $k \geq 1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel

n non nul, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$ (transformation d'Abel).

Q2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.

En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

Q3. Exemple.

Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$

Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

Deuxième partie : convergence uniforme de séries

On considère une suite de réels (a_n) et (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On pose, pour tout $z \in A$ et pour tout entier naturel n , $F_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$.

On suppose que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $z \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|F_n(z)| \leq M$ (on dit que la suite (F_n) est uniformément bornée).

Q4. Démontrer que la suite $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A et que la série de fonctions

$\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1}) F_k$ converge normalement sur A .

Q5. À l'aide d'une transformation d'Abel, en déduire que la série de fonctions $\sum a_n f_n$ converge uniformément sur A .

Troisième partie : convergence uniforme d'une série entière

Q6. Si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est une série entière de la variable complexe de rayon $R > 0$, rappeler le résultat du cours concernant la convergence uniforme de cette série.

Dans la suite du problème, on considère la série entière de la variable complexe $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ de rayon 1.

Q7. On note $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Démontrer que la série de la variable réelle $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur

$] - 1, 1[$ (en particulier la série $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur D).

Q8. On pourra confondre un point de $\mathbb{R}^2$ et son affixe.

pour $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on note D_α l'ensemble des complexes z , tels que $|z| \leq 1$ et dont la partie réelle vérifie $\operatorname{Re}(z) \leq \cos \alpha$.

Représenter géométriquement l'ensemble D_α dans un repère orthonormé du plan.

Q9. Démontrer que D_α est une partie fermée de $\mathbb{C}$.

On pourra écrire :

$$D_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq \cos \alpha\}$$

et démontrer que D_α est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

En déduire que D_α est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

Q10. On note pour $z \in \mathbb{C}$ et n entier naturel, $F_n(z) = \sum_{k=0}^n z^k$.

Démontrer que pour tout $z \in D_\alpha$ et tout entier naturel n , si $x = \operatorname{Re}(z)$:

$$|F_n(z)| \leq \frac{2}{1-x} \leq \frac{2}{1-\cos \alpha}$$

Q11. Démontrer que la série entière $\sum \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur tous les compacts D_α (pour $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$).

Problème 2

Le but de ce problème est de démontrer et utiliser plusieurs critères pour prouver qu'une matrice symétrique réelle est définie positive. On rappelle que, pour un entier naturel non nul n , une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si et seulement si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top M X > 0.$$

Q12. Démontrer, en utilisant directement la définition précédente, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est définie positive.

Caractérisation spectrale

Q13. Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle pour que celle-ci soit définie positive.

Q14. Application : Démontrer que le polynôme $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$ admet trois racines réelles distinctes (on ne cherchera pas à les déterminer).

Démontrer alors que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est définie positive grâce à la caractérisation spectrale.

Un critère en dimension 2

Dans cette partie, on souhaite démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si sa trace et son déterminant sont strictement positifs.

Q15. Démontrer qu'une matrice définie positive M de taille quelconque vérifie toujours $\text{Tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.

Q16. Démontrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont la trace et le déterminant sont strictement positifs, est définie positive.

Q17. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai pour les matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Q18. (question supprimée)

Le critère de Sylvester

Dans cette partie, on étudie le critère de Sylvester, valable en toute dimension.

Pour une matrice carrée quelconque $M = (m_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit le k -ième mineur principal comme étant le déterminant de la matrice $M_k = (m_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, k \rrbracket} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. On précise qu'une matrice carrée de taille n possède n mineurs principaux.

Par exemple, les trois mineurs principaux de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ de la question **Q14**

sont les déterminants des matrices $B_1 = (1)$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B_3 = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On dit qu'une matrice vérifie le critère de Sylvester si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs. On souhaite alors démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si elle vérifie le critère de Sylvester.

Par exemple, pour la matrice B de la question **Q14**, on constate que :

$$\det(B_1) = 1 > 0, \det(B_2) = 2 > 0 \text{ et } \det(B_3) = 3 > 0.$$

La matrice B vérifie le critère de Sylvester, elle est donc définie positive.

Q19. On fixe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ainsi qu'un vecteur colonne

$X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$. Déterminer un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, tel que :

$$X_k^\top M_k X_k = X^\top M X.$$

Q20. Démontrer que toute matrice symétrique réelle définie positive vérifie le critère de Sylvester.

Dans les deux questions suivantes, il s'agit de démontrer la réciproque, c'est-à-dire que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive. Pour cela, on va raisonner par récurrence sur la taille n de la matrice.

Q21. Soit $n \geq 2$ et soit une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) > 0$. On écrit cette matrice par blocs sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^\top & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } M_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}.$$

On suppose que la matrice M_{n-1} est définie positive.

Justifier l'existence d'un vecteur colonne $V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que $M_{n-1}V + U = 0$.

En notant $Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$, démontrer alors que $Q^\top M Q$ s'écrit par blocs

$$\begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix} \text{ avec } \beta > 0.$$

Q22. Démontrer par récurrence que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

Q23. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la matrice $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ?

Q24. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ? Justifier.

Q25. Démontrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$:

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0.$$

Q26. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ la matrice $S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

est-elle définie positive ?