

Suites, polynômes, matrices

DM 6



Exercice 1 : Des suites, des polynômes et des matrices !

L'objectif de l'exercice est de déterminer de deux façons différentes la puissance n -ième de la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Préambule :

- Déterminez deux entiers a et b tel que $N^2 = aN + bI_3$.
- En déduire que N est inversible et précisez N^{-1} .

2. Première méthode : avec des suites uniquement

- Montrez qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, N^{n+1} = u_n N + v_n I$$

- Donnez la relation liant (u_{n+1}, v_{n+1}) et (u_n, v_n) , et précisez u_0 et v_0 .
- Montrez que la suite (t_n) définie par $t_n = u_n + v_n$ est constante. En déduire son expression explicite.
- En déduire que (u_n) est arithmético-géométrique.
- Exprimez explicitement u_n et v_n en fonction de n .
- En déduire N^n .

3. Deuxième méthode : avec un polynôme annulateur.

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, avec $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ ($n \in \mathbb{N}$, et pour $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ ($m \in \mathbb{N}$), on

définit $P(M)$ par $P(M) = \sum_{k=0}^n a_k M^k$.

Par exemple, si $P = X^2 + X - 2$, on a $P(M) = M^2 + M - 2I_m$.

Remarquez le $2I$ qui apparait à la place de la constante, qui provient de M^0 .

On admet (vous le montrerez l'an prochain) que si P et Q sont deux polynômes, la matrice $(PQ)(M)$ est égale à $P(M)Q(M)$.

Par exemple, si $P = X^3 + 1$, alors $P(M) = M^3 + I_m$, mais aussi, comme $P(X) = (X+1)(X^2 - X + 1)$, on a $P(M) = (M + I_m)(M^2 - M + I_m)$.

Enfin, on appelle **polynôme annulateur** d'une matrice M tout polynôme P tel que $P(M) = O_m$.

- A l'aide de la question 1a), déterminer un polynôme annulateur de N , de degré 2. On note P ce polynôme.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminez le reste de la division euclidienne de X^n par P . On notera R_n ce reste.
- Justifiez que $N^n = R_n(N)$ et en déduire N^n .

1. a) En calculant N^2 , on trouve $N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

En observant attentivement N^2 et N (hors coefficient diagonaux), on reconnaît $-2N$. La diagonale s'obtient en ajoutant 3 partout, et donc $N^2 = -2N + 3I$.

- b) D'après la relation précédente, on a $N^2 + 2N = 3I$ donc $N \frac{1}{3}(N + 2I_3) = I$

Les matrices sont carrées, donc N est inversible, et son inverse est

$$\frac{1}{3}(N + 2I_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. a) L'analyse qui suit n'a pas besoin d'être sur la copie :

Pour $n = 0$, on a $N = 1N$, donc $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$. Si on avait $N^{n+1} = u_n N + v_n I$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Alors $N^{n+2} = N \times N^{n+1} = u_n N^2 + v_n N$, donc $N^{n+2} = -2u_n N + 3u_n I + v_n N = (v_n - 2u_n)N + 3u_n I$. Ainsi, si on veut avoir $N^{n+2} = u_{n+1}N + v_{n+1}I$, il suffit de poser $u_{n+1} = v_n - 2u_n$ et $v_{n+1} = 3u_n$.

Sur la copie, on rédige seulement la récurrence ci dessous :

Montrons par récurrence que les suites (u_n) et (v_n) suivantes, obtenues par analyse, conviennent :

$$u_0 = 1, v_0 = 0 \text{ et la double relation } \begin{cases} u_{n+1} = v_n - 2u_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

Pour $n = 0$, on a $N = 1N = u_0 N + v_0 I$, donc l'initialisation est validée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'on a $N^{n+1} = u_n N + v_n I$.

Alors $N^{n+2} = N \times N^{n+1} = u_n N^2 + v_n N$, d'où $N^{n+2} = -2u_n N + 3u_n I + v_n N$, ou encore

$$N^{n+2} = (v_n - 2u_n)N + 3u_n I.$$

Ainsi, on a bien $N^{n+2} = u_{n+1}N + v_{n+1}I$

Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{N^{n+1} = u_n N + v_n I}$ avec (u_n) et (v_n) les suites proposées.

- b) Soit $t_n = u_n + v_n$, alors $t_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = v_n - 2u_n + 3u_n = v_n + u_n = t_n$.

La suite (t_n) est donc stationnaire et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n + v_n = u_0 + v_0 = 1}$.

- c) Comme $u_n + v_n = 1$, on obtient $u_{n+1} = -v_{n+1} + 1$, d'où $\boxed{u_{n+1} = -3u_n + 1}$.

- d) (u_n) est une suite arithmético géométrique. On résout $c = -3c + 1$, et on trouve $c = \frac{1}{4}$.

On a alors $u_{n+1} - \frac{1}{4} = -3(u_n - \frac{1}{4})$ donc la suite $(u_n - \frac{1}{4})$ est géométrique et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-3)^n(u_0 - \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}$.

Ainsi $\boxed{u_n = \frac{1}{4}(1 - (-3)^{n+1}) \text{ et } v_n = 1 - u_n = \frac{1}{4}(3 + (-3)^{n+1})}$.

- e) On remplace maintenant dans l'expression :

$$N^n = u_{n-1}N + v_{n-1}I_n = \frac{1}{4}(1 - (-3)^n)N + \frac{1}{4}(3 + (-3)^n)I$$

Si on calcule tout ça, on trouve :

$$\boxed{N^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 - (-3)^n & -2 + 2(-3)^n & 1 - (-3)^n \\ 2 - 2(-3)^n & 4(-3)^n & 2 - 2(-3)^n \\ -1 + (-3)^n & 2 - 2(-3)^n & 3 + (-3)^n \end{pmatrix}}$$

3. a) A la question 1, on a montré que $N^2 = -2N + 3I$, donc $N^2 + 2N - 3I = O_3$.

Ainsi, $P = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de N .

- b) On sait que

$$X^n = (X^2 + 2X - 3)Q + R_n(X)$$

avec $\deg(R_n) < 2$. Ainsi, $R_n(X) = a_n X + b_n$ avec a_n et b_n réels.

Or $X^2 + 2X - 3$ admet deux racines : 1 et -3.

On a donc, en évaluant la relation au dessus en 1 et -3, que :

$$\begin{cases} 1 &= 0 + a_n + b_n \\ (-3)^n &= 0 - 3a_n + b_n \end{cases}$$

Ainsi $a_n = \frac{1}{4}(1 - (-3)^n)$ et $b_n = \frac{1}{4}(3 + (-3)^n)$

C'est à dire $R_n(X) = \frac{1}{4}(1 - (-3)^n)X + \frac{1}{4}(3 + (-3)^n)$

- c) Comme $X^n = (X^2 + 2X - 3)Q + R_n(X)$, on a $N^n = (N^2 + 2N - 3)Q(N) + R_n(N)$ et comme $N^2 + 2N - 3 = \mathcal{O}_3$, on a directement $N^n = R_n(X)$, d'où

$$N^n = \frac{1}{4}(1 - (-3)^n)N + \frac{1}{4}(3 + (-3)^n)I_3$$

On tombe exactement sur la relation obtenue en 2e : on retrouve bien la même formule (et heureusement !)



Exercice 2 : exo "étoile"

L'objectif de l'exercice est de trouver tous les polynômes P non nuls de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient

$$P(X^2) = -P(X)P(X+2)$$

Remarquons déjà que si on suppose $n = \deg(P)$, alors

$$\deg(P(X^2)) = 2n \text{ et } \deg(P(X)P(X+2)) = n + n$$

Autrement dit, $2n = 2n$: la technique permettant de déterminer le degré comme en TD n'aboutit donc pas !

Cet exercice propose donc une autre méthode, où on va chercher les racines du polynôme.

1. a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P . Montrez que α^2 est racine de P également.
 b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \alpha^{(2^n)}$ est racine de P .
 c) Montrez que si $|\alpha| \neq 0$ et $|\alpha| \neq 1$, alors les x_n sont tous distincts.
 d) En déduire que le module de α est égal à 0 ou 1.
2. a) Montrez que si α est racine, alors $\beta = (\alpha - 2)^2$ est racine
 b) En déduire que $|\alpha - 2| = 0$ ou 1.
3. Montrez que $\alpha = 1$ est la seule racine du polynôme (ATTENTION : α n'est peut-être pas réel à la base !) et conclure sur les polynômes vérifiant la relation proposée. (on n'oubliera pas le coefficient dominant....)

On appelle (E) la relation $P(X^2) = -P(X)P(X+2)$.

1. a) Supposons α racine de P , alors la relation (E) nous donne

$$P(\alpha^2) = -P(\alpha)P(\alpha+2)$$

Or $P(\alpha) = 0$, donc $P(\alpha^2) = 0$ et donc α^2 est racine.

- b) Par récurrence : pour $n = 0$, on a $x_n = \alpha^{2^0} = \alpha$ qui est racine donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit maintenant $n \geq 0$ et supposons que $x_n = \alpha^{2^n}$ est racine.

D'après la question 1a, le carré de ce nombre est racine aussi (c'est comme si on reposait $\alpha = x_n \dots$), c'est à dire $x_n^2 = (\alpha^{2^n})^2 = \alpha^{2 \times 2^n} = \alpha^{2^{n+1}} = x_{n+1}$ est racine.

Par le principe de récurrence, on a bien que α^{2^n} est racine pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- c) On va montrer que si on suppose que $|\alpha| \neq 1$ et $|\alpha| \neq 0$ alors si $n \neq p$, $x_n \neq x_p$.

Pour le montrer, on peut par exemple raisonner sur la suite des modules : la suite $(|x_n|)$ est une suite qui vérifie que $|x_{n+1}| = |x_n|^2$.

Cette suite est donc strictement décroissante si $0 < |\alpha| < 1$, strictement croissante si $|\alpha| > 1$.

Dans tous les cas, si $n \neq p$, alors $|x_n| \neq |x_p|$, donc $x_n \neq x_p$ et les x_n sont tous distincts dès lors que $|\alpha| \notin \{0, 1\}$.

Une autre version consiste à dire que si il existe n et m avec $n \neq m$, par exemple $n > m$, et tels que $x_n = x_m$, alors comme $\alpha \neq 0$, on a $\frac{x_n}{x_m} = 1$, autrement dit

$$\alpha^{2^n - 2^m} = 1$$

Ainsi α est racine $2^n - 2^m$ -ième de l'unité. Donc $|\alpha| = 1$: absurde.

- d) Si $|\alpha| \neq 0$ et $|\alpha| \neq 1$, le polynôme P se retrouve avec une infinité de racines distinctes, donc $P = 0$. Ainsi, si P est non nul, seul $|\alpha| = 0$ ou $|\alpha| = 1$ sont possibles.
2. a) Si α est racine, on a $P((\alpha - 2)^2) = -P(\alpha - 2) \times P(\alpha - 2 + 2) = -P(\alpha - 2)P(\alpha) = 0$.
Donc $\beta = (\alpha - 2)^2$ est racine.
- b) On a vu dans la question 1 que les racines sont toutes de modules 0 ou 1, et il se trouve que $(\alpha - 2)^2$ est racine, donc $|(\alpha - 2)^2| = 0$ ou $|(\alpha - 2)^2| = 1$, c'est à dire $|\alpha - 2|^2 = 0$ ou $|\alpha - 2|^2 = 1$, et finalement $|\alpha - 2| = 1$ ou $|\alpha - 2| = 0$.
3. Plusieurs techniques possibles.

Voici d'abord une version analytique :

On a différents cas à considérer :

- si $|\alpha| = 0$, alors $\alpha = 0$, mais alors $|\alpha - 2| \neq 0$ et $|\alpha - 2| \neq 1$, donc $\alpha = 0$ est impossible.
- si $|\alpha| = 1$, alors $|\alpha - 2| \neq 0$ (car cela signifierait que $\alpha = 2$), donc $|\alpha - 2| = 1$.

On cherche donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = e^{i\theta}$ avec $|\alpha - 2| = 1$.

Or

$$|\alpha - 2|^2 = (\cos \theta - 2)^2 + \sin^2(\theta) = \cos^2 \theta - 4 \cos \theta + 4 + \sin^2 \theta = -4 \cos \theta + 5$$

Ainsi, si $|\alpha - 2| = 1$, alors $|\alpha - 2|^2 = 1$, et donc $-4 \cos \theta = -4$, d'où $\cos \theta = 1$ et donc $\theta = 0 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Finalement seul $\alpha = 1$ est possible.

Voici maintenant une version géométrique :

Pour la même raison que dans l'analytique, on cherche α tel que $|\alpha| = 1$ et $|\alpha - 2| = 1$. Cela signifie que α est l'abscisse d'un point à l'intersection du cercle de centre 0 et de rayon 1 (puisque $|\alpha| = 1$) et le cercle de centre 2 et de rayon 1 (puisque $|\alpha - 2| = 1$). Un seul point est à cette intersection : celui d'abscisse $\alpha = 1$.

Maintenant qu'on sait que seul $\alpha = 1$ peut être racine, on peut conclure : si P est un polynôme non nul solution, P est de la forme

$$P(X) = \lambda(X - 1)^n$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ (n est l'ordre de multiplicité de la racine 1) et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On remplace dans la relation (E), et on voit alors que la seule valeur possible pour λ est -1 . Ainsi, les solutions de l'équation sont les polynômes P de la forme

$$P(X) = -(X - 1)^n \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$