MINES Maths 2 PC 2024

Eléments de correction

1. La matrice (1) est une matrice de Hadamard d'ordre 1.

La matrice $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de Hadamard d'ordre 2 car $\frac{1}{\sqrt{2}} H_2$ est orthogonale.

2. Soit H une matrice de Hadamard. Je note $L_1, \cdots, L_n$ les lignes de H et $C_1, \cdots, C_n$ ses colonnes.

- Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Notons H' la matrice obtenue par multiplication la ligne L_i par -1. Ses coefficients appartiennent à $\{-1, 1\}$.

  La matrice $\frac{1}{\sqrt{n}} H$ est orthogonale donc ses lignes $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} L_1, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}} L_i, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}} L_n\right)$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire euclidien usuel. Par conséquent, la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} L_1, \cdots, \frac{-1}{\sqrt{n}} L_i, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}} L_n\right)$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ donc la matrice $\frac{1}{\sqrt{n}} H'$ est orthogonale donc H' est une matrice de Hadamard.

  cours : une matrice est orthogonale si et seulement ses lignes forment une BON

- Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Notons H'' la matrice obtenue en échangeant les lignes L_i et L_j de H. Les coefficients de H'' sont encore dans $\{-1, 1\}$.

  Les lignes de $\frac{1}{\sqrt{n}} H''$, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} L_1, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}} L_j, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}} L_i, \cdots, \sqrt{n} L_n\right)$ forment encore une base orthonormée donc $\frac{1}{\sqrt{n}} H''$ est une matrice orthogonale donc H'' est une matrice de Hadamard.

- Pour obtenir les résultats analogues sur les colonnes, on peut faire les même raisonnements en utilisant qu'une matrice est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On peut aussi remarquer que H est une matrice de Hadamard si et seulement si H^T est une matrice de Hadamard (car $\frac{1}{\sqrt{n}} H \in \mathcal{O}(n)$ si et seulement si $\frac{1}{\sqrt{n}} H^T \in \mathcal{O}(n)$).

3. Pour chaque colonne j de H, si $h_{1j} = -1$, je multiplie la colonne j par -1. On obtient alors une matrice de Hadamard d'après la question précédente dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1.

Supposons que H est une matrice de Hadamard d'ordre n, dont les coefficients de la première ligne sont égaux à 1. On a $HH^T = nI_n$ car $\frac{1}{\sqrt{n}} H$ est orthogonale.

Donc le coefficient situé sur la première ligne et deuxième colonne de HH^T vaut 0 :

$$0 = [nI_n]_{1,2} = \left[HH^T\right]_{1,2} = L_1 L_2^T = \sum_{k=1}^{n} h_{1,k} h_{2,k} = \sum_{k=1}^{n} h_{2,k} \quad \text{car } h_{1,k} = 1$$

La somme des coefficients sur la ligne 2 de H est donc nulle ; il y a autant de coefficients égaux à 1 que de coefficients égaux à -1 sur les n coefficients de la ligne 2, donc n est pair.

4. Soit H une matrice de Hadamard d'ordre $n \geqslant 4$.

Commençons par justifier ce qui est demandé :

d'après la question précédente, on peut construire une matrice H' à partir de H dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1.

On a vu aussi à la question précédente, que la somme des coefficients de la deuxième ligne vaut 0 : il y a $n/2$ coefficients égaux à 1 et $n/2$ coefficients égaux à -1. Alors en échangeant les colonnes de H', on peut regrouper les coefficients de la ligne 2, égaux 1 et ceux égaux à -1 pour obtenir une matrice H'' de Hadamard d'après la question 2, dont la première ligne est constituée de 1 et la deuxième composée de $n/2$ coefficients égaux à 1 puis $n/2$ coefficients égaux à -1.

Supposons maintenant que la première ligne de H est constituée de 1 et la deuxième composée de $n/2$ coefficients égaux à 1 puis $n/2$ coefficients égaux à -1.

On a $HH^T = nI_n$ donc en regardant les coefficients des lignes 1 et 2 de la colonne 3 :

$$\begin{cases} 0 = & [nI_n]_{1,3} = \left[HH^T\right]_{1,3} = L_1 L_3^T = \sum_{k=1}^{n} h_{1,k} h_{3,k} = \sum_{k=1}^{n} h_{3,k} \\ 0 = & [nI_n]_{2,3} = \left[HH^T\right]_{2,3} = L_2 L_3^T = \sum_{k=1}^{n} h_{2,k} h_{3,k} = \sum_{k=1}^{n/2} h_{3,k} - \sum_{k=n/2+1}^{n} h_{3,k} \end{cases}$$

En notant, $S_1 = \sum_{k=1}^{n/2} h_{3,k}$ et $S_2 = \sum_{k=n/2+1}^{n} h_{3,k}$, on a donc $S_1+S_2=0$ et $S_1-S_2=0$ d'où $S_1=S_2=0$.

Par conséquent, parmi les $n/2$ premiers coefficients de la ligne 3 de H, il y a autant de coefficients égaux 1 que de coefficients égaux à -1 donc $n/2$ est pair, et par conséquent, n est un multiple de 4.

5. f est un endomorphisme symétrique (le programme officiel utilise maintenant le vocabulaire autoadjoint) donc d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, constituée de vecteurs propres de f.

6. La famille $(e_k, \cdots, e_n)$ est libre car orthonormée donc $\dim(T_k) = n-k+1$.

De plus, $S_k + T_k \subset \mathbb{R}^n$, donc $\dim(S_k+T_k) \leqslant n$.

On a alors par la formule de Grassman

$$\dim(S_k \cap T_k) = \underbrace{\dim(S_k)}_{=k} + \underbrace{\dim(T_k)}_{=n-k+1} - \underbrace{\dim(S_k+T_k)}_{\leqslant n} \geqslant 1 \quad \text{d'où} \quad S_k \cap T_k \neq \{0\}$$

7. Soit $x \in S_k \cap T_k$ tel que $\|x\| = 1$.

On décompose x dans $\mathrm{Vect}(e_k, \cdots, e_n)$: $x = \sum_{i=k}^{n} x_i e_i$.

La famille $(e_k, \cdots, e_n)$ étant orthonormée, on a $1 = \|x\|^2 = \sum_{i=k}^{n} x_i^2$.

De plus, par bilinéarité du produit scalaire : calcul classique à connaître

$$\begin{aligned}(x, f(x)) = \left(\sum_{i=k}^{n} x_i e_i, \sum_{j=k}^{n} x_j f(e_j)\right) = \sum_{k \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j \underbrace{(e_i, f(e_j))}_{=(e_i, \lambda_j e_j)} &= \sum_{k \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j \lambda_j \underbrace{(e_i, e_j)}_{=\delta_{i,j}} \\ &= \sum_{i=k}^{n} x_i^2 \underbrace{\lambda_i}_{\geqslant \lambda_k} \\ &\geqslant \lambda_k \sum_{i=k}^{n} x_i^2 = \lambda_k\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\max_{x \in S_k, \|x\|=1} (x, f(x)) \geqslant \lambda_k$$

8. D'après la question précédente, pour tout $S \in \pi_k$, $\max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \geqslant \lambda_k$ donc

$$\min_{S \in \pi_k} \left(\max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \right) \geqslant \lambda_k$$

De plus, pour $S = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$, pour tout $x \in S$, tel que $\|x\| = 1$, par un calcul analogue à la question précédente, en décomposant $x = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i$, on a :

$$(x, f(x)) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \lambda_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \lambda_k = \lambda_k \|x\|^2 = \lambda_k$$

Par conséquent :

$$\text{pour } S = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k) \in \pi_k, \quad \max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \leqslant \lambda_k$$

D'où

$$\min_{S \in \pi_k} \left(\max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \right) \leqslant \lambda_k$$

Conclusion :

$$\lambda_k = \min_{S \in \pi_k} \left(\max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \right)$$

9. Supposons M symétrique positive. D'après le théorème spectral, il existe D matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}(n)$ tel que $M = PDP^T = PDP^{-1}$.

question très classique à savoir faire

Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D, qui sont positifs car M est supposée positive.
Je pose $\Delta = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\sqrt{\lambda_i}$.
Et je pose $B = \Delta P^T$. On a $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$B^T B = P\Delta^T \Delta P^T = P\Delta^2 P^T = PDP^T = M$$

Supposons maintenant que M est symétrique, et admet une unique valeur propre strictement positive λ d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre unitaire u.
Pour établir l'existence de $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = \lambda u.u^T - B^T B$ il suffit d'après la première partie de la question de montrer que $N = \lambda u.u^T - M$ est symétrique positive.
On a $N^T = (\lambda u.u^T)^T - M^T = \lambda u.u^T - M = N$ donc N est symétrique (et réelle).

cours : N sym. positive ssi N sym. et $\operatorname{Sp}(N) \subset \mathbb{R}^+$

Montrons que $\operatorname{Sp}(N) \subset \mathbb{R}_+$.
On note $\operatorname{Sp}(M) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ avec $\lambda_1 = \lambda > 0$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $\lambda_k \leqslant 0$.
On considère une base orthonormée $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, constituée de vecteurs propres de M où $e_1 = u$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $Me_k = \lambda_k e_k$.
On a alors en utilisant $Mu = \lambda u$ et $e_k \in \operatorname{Vect}(u)^\perp$ pour $k \in [\![2, n]\!]$:

th. spectral appliqué à $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
on remarque qu'une base de vecteurs propres de M est aussi une base de vecteurs propres de N

$$Nu = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![2, n]\!],\ Ne_k = \lambda u. \underbrace{u^T e_k}_{=0} - Me_k = -\lambda_k e_k$$

Donc $(u, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de vecteurs propres de N et $\operatorname{Sp}(N) = \{\lambda, -\lambda_2, \cdots, -\lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ car $\lambda > 0$ et $\lambda_k \leqslant 0$ pour $k \in [\![2, n]\!]$.
Conclusion : $\lambda u.u^T - M$ est symétrique positive donc il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\lambda u.u^T - M = B^T B$.

10. Par linéarité de la transposée $P^T = I_n^T - \frac{1}{n}\left(e.e^T\right)^T = I_n - \frac{1}{n}e.e^T = P$ donc P est une matrice symétrique.
De plus, $Pe = \left(I_n - \frac{1}{n}e.e^T\right)e = e - \frac{1}{n}e.\underbrace{e^T.e}_{=n} = 0$ donc pour tout $x \in \operatorname{Vect}(e), Px = 0$.
Et pour tout $x \in \operatorname{Vect}(e)^\perp$, $Px = x - \frac{1}{n}e.\underbrace{e^T.x}_{=0} = x$.
On en déduit que P est la matrice (dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$) de la projection sur $\operatorname{Vect}(e)^\perp$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(e)$, c'est à dire la projection orthogonale sur $\operatorname{Vect}(e)^\perp$.

je n'ai pas eu besoin d'établir l'égalité $P^2 = P$ dans ma rédaction pour montrer que P est un projecteur, car j'ai directement calculé Px pour $x \in \operatorname{Vect}(e)$ puis pour $x \in \operatorname{Vect}(e)^\perp$

11. On a :

$$Ce^T = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & \cdots & \|x_1\|^2 \\ \|x_2\|^2 & \cdots & \|x_2\|^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \|x_n\|^2 & \cdots & \|x_n\|^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad eC^T = \left(Ce^T\right)^T = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & \|x_2\|^2 & \cdots & \|x_n\|^2 \\ \|x_1\|^2 & \|x_2\|^2 & \cdots & \|x_n\|^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \|x_1\|^2 & \|x_2\|^2 & \cdots & \|x_n\|^2 \end{pmatrix}$$

et

$$M_A^T M_A = \left(x_i^T x_j\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

donc pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$d_{i,j} = d\left(A_i, A_j\right)^2 = \|x_i - x_j\|^2 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2(x_i, x_j) = \left[Ce^T\right]_{i,j} + \left[eC^T\right]_{i,j} - 2\left[M_A^T M_A\right]_{i,j}$$

D'où :

$$D = Ce^T + eC^T - 2M_A^T M_A$$

- On a $D \in \Delta_n$ donc D est symétrique et P est aussi symétrique par conséquent,

$$T(D)^T = -\frac{1}{2}P^T D^T P^T = -\frac{1}{2}PDP = T(D)$$

Donc $T(D)$ est une matrice symétrique.

- De plus, en utilisant la décomposition $D = Ce^T + eC^T - 2M_A^TM_A$, on a :

$$T(D) = -\frac{1}{2}\left(PC\underbrace{e^TP}_{=0} + \underbrace{Pe}_{=0}C^TP - 2PM_A^TM_AP\right) = PM_A^TM_AP \underbrace{=}_{P=P^T} (M_AP)^TM_AP$$

Donc pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^TT(D)X = X^T(M_AP)^TM_APX = \|M_APX\|^2 \geqslant 0$$

Donc $T(D)$ est positive.

- Et $T(D)e = -\frac{1}{2}PDPe = 0$ car $Pe = 0$ (cf q10).

Donc $T(D) \in \Omega_n$.

12. Soit $A \in \Omega_n$. A est symétrique positive donc d'après la question 9, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = B^TB$.

Notons $x_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ les colonnes de B. Alors, on a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = x_i^Tx_j$. On a alors en utilisant le même calcul qu'à la question 11 :

$$\begin{aligned}[K(A)]_{i,j} &= \left[e.a^T\right]_{i,j} + \left[a.e^T\right]_{i,j} - 2a_{i,j} = a_{i,i} + a_{j,j} - 2a_{i,j} \\ &= \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2(x_i, x_j) = \|x_i - x_j\|^2 = d(A_i, A_j)^2\end{aligned}$$

où $A_1, \cdots, A_n$ sont les points de $\mathbb{R}^n$ associés aux vecteurs coordonnées $x_1, \cdots, x_n$.
Donc $K(A) \in \Delta_n$.

13. Pour tout $A \in \Omega_n$, en utilisant $Pe = 0$ et $e^TP = (Pe)^T = 0$:

$$\begin{aligned}T \circ K(A) = -\frac{1}{2}(\underbrace{Pe.a^TP}_{=0} + \underbrace{Pa.e^TP}_{=0} - 2PAP) = PAP &= \left(I_n - \frac{1}{n}e.e^T\right)A\left(I_n - \frac{1}{n}e.e^T\right) \\ &= A - \frac{1}{n}Ae.e^T - \frac{1}{n}e.e^TA + \frac{1}{n^2}e.e^TAe.e^T \\ &= A \quad \text{car } Ae = 0 \text{ et } e^TA = (Ae)^T = 0\end{aligned}$$

Donc $T \circ K = \mathrm{id}_{\Omega_n}$.

14. Soit D une matrice à coefficients positifs ou nuls et diagonale nulle.

- Supposons D est MDE, c'est à dire $D \in \Delta_n$.

D'après la question 11, $-\frac{1}{2}PDP = T(D) \in \Omega_n$ donc $T(D)$ est positive.

- Supposons $A = -\frac{1}{2}PDP$ positive. Alors $A \in \Omega_n$. Montrons que $D \in \Delta_n$.
  Remarque : j'ai naturellement envie d'écrire que $-\frac{1}{2}PDP = T(D)$; en admettant $K \circ T = \mathrm{Id}_{\Delta_n}$, $D = K \circ T(D) = K(A)$ avec $A \in \Omega_n$, et on en déduit (Q12) $D \in \Delta_n$. Mais ceci ne tient pas car pour écrire $D = K \circ T(D)$ sachant que $K \circ T = \mathrm{Id}_{\Delta_n}$, il faut savoir que $D \in \Delta_n$, ce que l'on souhaite démontrer. On va par conséquent devoir montrer que $K\left(-\frac{1}{2}PDP\right) = D$.

  On a $A = -\dfrac{1}{2}PDP = -\dfrac{1}{2}\left(D - \dfrac{1}{n}De.e^T - \dfrac{1}{n}e.e^TD + \dfrac{1}{n^2}e.e^TDe.e^T\right)$ donc

calcul un peu lourd, il y a probablement une solution plus élégante et rapide pour éviter ce calcul mais je ne l'ai pas trouvée

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = -\frac{1}{2}\left(d_{i,j} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (d_{i,k} + d_{k,j}) + \frac{1}{n^2}\sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} d_{k,\ell}\right)$$

  et l'égalité $K(A) = e.a^T + a.e^T - 2A$ donne : pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$
\begin{aligned}
[K(A)]_{i,j} &= a_{i,i} + a_{j,j} - 2a_{i,j} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\underbrace{d_{i,i} + d_{j,j}}_{=0} - 2d_{i,j} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(d_{i,k} + d_{k,i} + d_{j,k} + d_{k,j} - 2d_{i,k} - 2d_{k,j}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(-2d_{i,j} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(d_{k,i} - d_{i,k} + d_{j,k} - d_{k,j}\right)\right) \\
&= d_{i,j} \quad \text{car } d_{i,k} = d_{k,i} \text{ et } d_{j,k} = d_{k,j} \text{ par symétrie de } D
\end{aligned}
$$

Donc

$$D = K(A) \in \Delta_n \qquad \text{d'après la question 12}$$

15. Soit D une matrice symétrique à coefficients positifs, de diagonale nulle, ayant une unique valeur propre λ strictement positive d'espace propre $\mathrm{Vect}(e)$.

pour montrer que D est MDE, il suffit de montrer que $-\frac{1}{2}PDP$ est positive d'après la question précédente

On utilise le résultat de la question 9 : il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tel que $D = \lambda e.e^T - B^T B$.
Alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, en utilisant $X^T Pe.e^T PX = 0$ car $Pe = 0$:

$$X^T AX = -\frac{1}{2}\left(X^T PDPX\right) = -\frac{1}{2}\left(\lambda X^T Pe.e^T PX - X^T PB^T BPX\right) = \frac{1}{2}\|BPX\|^2 \geqslant 0$$

Ce qui montre que $A = -\frac{1}{2}PDP$ est positive et donc que D est MDE d'après la question précédente.

16. Soit D une MDE d'ordre n. Alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $d_{i,i} = d(A_i, A_i)^2 = 0$ donc en notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de D (réelles car D est symétrique) :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} = 0$$

17. On utilise la décomposition de la question 11, $D = C.e^T + e.C^T - 2(M_A)^T M_A$.
Pour tout $x \in \mathrm{Vect}(e)^\perp$, $e^T x = 0$ et $x^T e = 0$ d'où

$$x^T Dx = x^T C.e^T x + x^T e.C^T x - 2x^T (M_A)^T M_A x = -2\|M_A x\|^2 \leqslant 0$$

18. On applique le théorème de Courant-Fischer démontré à la question 8, à l'endomorphisme canoniquement associé à D, $f : x \mapsto Dx$

$$\lambda_{n-1} = \min_{S \in \pi_{n-1}}\left(\max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x))\right)$$

Donc en prenant $S = \mathrm{Vect}(e)^\perp \in \pi_{n-1}$:

$$\lambda_{n-1} \leqslant \max_{x \in \mathrm{Vect}(e)^\perp, \|x\|=1} (x, f(x))$$

Or d'après la question précédente, pour tout $x \in \mathrm{Vect}(e)^\perp$, $(x, f(x)) = x^T Dx \leqslant 0$ d'où :

$$\lambda_{n-1} \leqslant \max_{x \in \mathrm{Vect}(e)^\perp, \|x\|=1} (x, f(x)) \leqslant 0$$

On a donc $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ (q16). D'où

$$\lambda_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \geqslant 0$$

Raisonnons par l'absurde et supposons $\lambda_n = 0$. Alors l'égalité $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ avec $\lambda_i \leqslant 0$, impliquent $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\mathrm{Sp}(D) = \{0\}$. Mais D est diagonalisable (car symétrique réelle), donc

D est semblable à la matrice nulle donc $D = 0$ ce qui est exclu.

Par conséquent,

$$\lambda_n > 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n-1]\!], \lambda_i \leqslant 0$$

19.
- $D^T = (U^T \Lambda U)^T = U^T \Lambda^T U = U^T \Lambda U = D$ donc D est symétrique.
- On a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $u_{i,j} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} h_{i,j} \in \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dfrac{-1}{\sqrt{n}} \right\}$.

  Pour tout $i, j \in [\![1,n]\!]$, en utilisant $u_{1,i} = u_{1,j} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ car les coefficients de la première ligne de H sont égaux à 1 ; et si $i \geqslant 2$, $\lambda_i \leqslant 0$ et $u_{k,i} u_{k,j} \leqslant \frac{1}{n}$ donc $u_{k,i} \lambda_i u_{k,j} \geqslant \frac{\lambda_i}{n}$:

$$d_{i,j} = \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} u_{k,i} \underbrace{\Lambda_{k,\ell}}_{=0 \text{ si } k \neq \ell} u_{\ell,j} = \sum_{k=1}^{n} u_{k,i} \lambda_k u_{k,j} = \lambda_1 \underbrace{u_{1,i} u_{1,j}}_{=1/n} + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{u_{k,i} \lambda_i u_{k,j}}_{\geqslant \lambda_i / n}$$

$$\geqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_i = 0$$

  Et en remarquant que $u_{k,i}^2 = \frac{1}{n}$

$$d_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} u_{k,i} \lambda_k u_{k,i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$$

  Donc D est à coefficients positifs et diagonale nulle.
- H est une matrice de Hadamard donc $U = \frac{1}{\sqrt{n}} H$ est orthogonale donc $D = U^T \Lambda U = U^{-1} \Lambda U$. D et Λ sont semblables donc D et U ont le même polynôme caractéristique :

$$\chi_D = \chi_\Lambda = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

  Donc $\mathrm{Sp}(D) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ et λ_1 d'ordre de multiplicité 1 (seule valeur propre > 0), donc l'espace propre associé à λ_1 est de dimension 1.

20. D'après la question précédente, D est symétrique à coefficients positifs, à diagonale nulle, et ayant une unique valeur propre strictement positive λ_1, d'espace propre de dimension 1. Pour pouvoir appliquer le résultat de la question 15, il ne reste plus qu'à vérifier que $De = \lambda_1 e$.

On a $D = U^T \Lambda U = U^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U$; d'après la formule de changement de bases, les colonnes de U^T sont des vecteurs propres de D associés aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

Or la première colonne de U^T est $\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} e$ d'où $De = \lambda_1 e$.

Conclusion : la matrice D vérifie toutes les conditions de la question 15 donc D est une MDE.

21. On suit le processus de construction de la matrice D décrit au début de cette partie.

On choisit une matrice de Hadamard, dont les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

D'après la question 20, la matrice $D = \frac{1}{4} H^T \Lambda H$ est une MDE ; on trouve $D = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 & 6 \\ 8 & 0 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 8 \\ 6 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.