

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

Cours - Révisions PCSI

Dans tout ce chapitre, E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel.

I. ESPACES PRÉHILBERTIENS

A. DÉFINITIONS

Définition 1

- ▶ Une *forme bilinéaire sur E* est une application Φ de $E \times E$ dans \mathbb{R} qui vérifie :

$$\forall (u, v, w) \in E^3, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{aligned} \Phi(\lambda u + \mu v, w) &= \lambda \Phi(u, w) + \mu \Phi(v, w) && \text{(linéarité à gauche)} \\ \Phi(u, \lambda v + \mu w) &= \lambda \Phi(u, v) + \mu \Phi(u, w) && \text{(linéarité à droite)} \end{aligned}$$

- ▶ Φ est dite *symétrique* lorsque $\forall (u, v) \in E^2, \Phi(u, v) = \Phi(v, u)$
- ▶ Φ est dite *positive* lorsque $\forall u \in E, \Phi(u, u) \geq 0$
- ▶ Φ est dite *définie* lorsque $\forall u \in E, [\Phi(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0_E]$

Notons que la linéarité à gauche et la symétrie impliquent la bilinéarité.

Définition 2

- ▶ On appelle *produit scalaire sur E* toute forme bilinéaire sur E , symétrique et définie positive.
- ▶ Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé *espace préhilbertien*.

Lorsque Φ est un produit scalaire sur E , on note habituellement $\langle u, v \rangle$ le réel $\Phi(u, v)$.
On rencontre également les notations $(u|v)$ ou $u \cdot v$

Définition 3

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .

L'application
$$\begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ u \longmapsto \sqrt{\langle u, u \rangle} \end{array}$$
 est une norme sur E appelée la *norme euclidienne*.

On note alors pour tout $u \in E, \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Exemples fondamentaux :

ESPACE VECTORIEL	PRODUIT SCALAIRE	NORME EUCLIDIENNE
$E = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ où $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$	$\ x\ = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
$E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T Y$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$	$\ X\ = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{X^T X}$
$E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ $(a \text{ et } b \text{ réels tels que } a < b)$	$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$	$\ f\ = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}$

Le premier/second produit scalaire est appelé *produit scalaire canonique* sur $\mathbb{R}^n / \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $n = 2$, c'est celui que vous avez étudié au lycée dans le plan.

↪ Exercice 1

Dans toute la suite, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne un produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

B. PROPRIÉTÉS CALCULATOIRES

Proposition 4

► *Généralisation de la bilinéarité :*

Pour tout $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q) \in E^{p+q}$ et tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{R}^{p+q}$, on a :

$$\left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^q \mu_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i \mu_j \langle u_i, v_j \rangle$$

► On a pour tout $u \in E$, $\langle u, 0_E \rangle = \langle 0_E, u \rangle = 0$.

Par suite :

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_E.$$

► *Calculs avec la norme :*

Pour tout $(u, v) \in E^2$, on a : $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle \quad \text{et} \quad \|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v \rangle$$

► *Formules de polarisation :*

Pour tout $(u, v) \in E^2$, on a :

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) \quad \text{et} \quad \langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

Les formules de polarisation permettent de trouver le produit scalaire dont provient une norme euclidienne.

Théorème 5 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

- ▶ Pour tout $(u, v) \in E^2$, on a :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

- ▶ De plus, l'égalité $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$ est vérifiée si et seulement si u et v sont colinéaires.

- ▶ On rappelle que deux vecteurs u et v sont colinéaires lorsque $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$
ou de manière équivalente lorsque $u = 0_E$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$.

- ▶ L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas des exemples fondamentaux 1 et 3 s'écrit :

$$\forall (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}))^2, \left| \int_a^b fg \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \sqrt{\int_a^b g^2}.$$

Théorème 6 (*Inégalité triangulaire*)

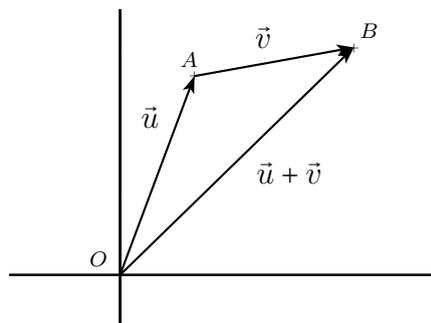
- ▶ Pour tout $(u, v) \in E^2$, on a :

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

- ▶ De plus, l'égalité $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ est vérifiée si et seulement si u et v sont colinéaires et orientés dans le même sens c'est-à-dire il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.

Illustration graphique dans le plan :

Le chemin direct est le plus court : $OB \leq OA + AB$.



↪ *Exercice 2*

C. ORTHOGONALITÉ

1. VECTEURS ORTHOGONAUX

Définition 7

Soit u et v deux vecteurs de E .

On dit que u et v sont *orthogonaux* et on note $u \perp v$ lorsque $\langle u, v \rangle = 0$.

- ▶ Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à lui-même.
Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E .
- ▶ L'orthogonalité dépend du produit scalaire.

Théorème 8 (Théorème de Pythagore)

Soit u et v deux vecteurs de E .

On a :

$$u \perp v \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Illustration graphique dans le plan :

Le triangle OAB est rectangle en A si et seulement si $OB^2 = OA^2 + AB^2$.

2. FAMILLES ORTHOGONALES / ORTHONORMALES

Définition 9

Soit (u_1, u_2, \dots, u_p) une famille de p vecteurs de E .

- ▶ La famille (u_1, u_2, \dots, u_p) est dite *orthogonale* lorsque les vecteurs u_1, \dots, u_p sont deux à deux orthogonaux c'est-à-dire lorsque :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2 \text{ avec } i \neq j, \langle u_i, u_j \rangle = 0$$

- ▶ La famille (u_1, u_2, \dots, u_p) est dite *orthonormale* ou *orthonormée* lorsqu'elle est orthogonale et composée de vecteurs de norme 1 c'est-à-dire lorsque :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Définition 10

Un vecteur u de E est dit *unitaire* ou *normé* lorsque $\|u\| = 1$.

- ▶ Si u un vecteur non nul de E alors le vecteur $\frac{1}{\|u\|}u$ est normé.
- ▶ Si (u_1, \dots, u_p) est une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul alors $\left(\frac{1}{\|u_1\|}u_1, \dots, \frac{1}{\|u_p\|}u_p\right)$ est orthonormale.

Théorème 11 (*Théorème de Pythagore*)

Si (u_1, u_2, \dots, u_p) est une famille orthogonale alors :

$$\|u_1 + u_2 + \dots + u_p\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \dots + \|u_p\|^2.$$

La réciproque est fautive si $p \geq 3$.

Proposition 12

Toute famille orthogonale de E ne contenant pas le vecteur nul est libre.

- ▶ En particulier, toute famille orthonormale est libre.
- ▶ Si E est un espace vectoriel de dimension n alors toute famille libre possède au plus n vecteurs. Par conséquent, toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul (en particulier toute famille orthonormale) possède au plus n vecteurs.

Théorème 13 (*Procédé d'orthonormalisation de Schmidt*)

Soit (u_1, u_2, \dots, u_p) une famille libre de E .

On calcule successivement les vecteurs (e_1, e_2, \dots, e_p) de la manière suivante :

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \text{ et pour tout } k \in \llbracket 2, p \rrbracket, u'_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, e_i \rangle e_i \text{ puis } e_k = \frac{u'_k}{\|u'_k\|}.$$

Alors (e_1, e_2, \dots, e_p) est une famille orthonormée de E telle que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$.

- ▶ Pour $p = 3$, les formules précédentes donnent :

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$u'_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1 \text{ puis } e_2 = \frac{u'_2}{\|u'_2\|}$$

$$u'_3 = u_3 - \langle u_3, e_1 \rangle e_1 - \langle u_3, e_2 \rangle e_2 \text{ puis } e_3 = \frac{u'_3}{\|u'_3\|}$$

- ▶ On part d'une famille **libre** de E et on obtient concrètement une famille **orthonormée** qui possède le même nombre de vecteurs et qui engendre le même espace que la famille précédente.
- ▶ Notons que l'on applique ce procédé à une famille déjà orthonormée alors elle n'est pas modifiée.

↪ Exercice 3

3. ORTHOGONAL D'UN SOUS-ESPACE

Définition 14

Soit X une partie de E .

On appelle *orthogonal de X* et on note X^\perp l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de X c'est-à-dire :

$$X^\perp = \{u \in E / \forall v \in X, u \perp v\}.$$

Exemples :

On a $E^\perp = \{0_E\}$. En effet, le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E est le vecteur nul.

On a $\{0_E\}^\perp = E$. En effet, tous les vecteurs de E sont orthogonaux au vecteur nul.

Proposition 15

Soit X une partie de E .

- ▶ X^\perp est un sous-espace vectoriel de E .
- ▶ $X^\perp = (\text{Vect}(X))^\perp$.

- ▶ Pour deux vecteurs u et v de E , on a l'équivalence :

$$u \perp v \Leftrightarrow u \in \{v\}^\perp \Leftrightarrow u \in (\text{Vect}(v))^\perp.$$

- ▶ On suppose que $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$. Soit $u \in E$.

Alors :

$$u \in F^\perp \Leftrightarrow u \in \{v_1, \dots, v_p\}^\perp \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle u, v_i \rangle = 0.$$

- ▶ On a toujours $X \subset (X^\perp)^\perp$.

II. ESPACES EUCLIDIENS

Définition 16

On appelle *espace euclidien* tout \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Exemple : L'espace vectoriel \mathbb{R}^n , muni du produit scalaire canonique, est un espace euclidien.

A. BASES ORTHONORMÉES

Définition 17

Soit \mathcal{B} une famille de vecteurs de E .

On dit que \mathcal{B} est une *base orthonormée* ou *orthonormale* de E lorsque \mathcal{B} est à la fois une base de E et une famille orthonormée.

Exemple : Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note e_i le n -uplet dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i -ème qui vaut 1. La base canonique (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de l'espace euclidien \mathbb{R}^n , muni de son produit scalaire canonique.

Proposition 18

On suppose que E est un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Si \mathcal{B} est une famille orthonormée de E de cardinal n alors \mathcal{B} est une base orthonormée de E .

Notons alors que dans l'algorithme de Gram-Schmidt, si l'on part d'une **base** de E alors on obtient une **base orthonormée** de E .

Théorème 19 (*Existence de bases orthonormées*)

Tout espace euclidien possède une base orthonormée.

Théorème 20 (*Théorème de la base orthonormée incomplète*)

Toute famille orthonormée d'un espace euclidien E peut être complétée en une base orthonormée de E .

Proposition 21 (*Calculs dans une base orthonormée*)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .
Soit u et v deux vecteurs de E s'écrivant dans la base \mathcal{B} :

$$u = \sum_{i=1}^n x_i e_i \text{ et } v = \sum_{i=1}^n y_i e_i \text{ avec } (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

- ▶ Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $x_i = \langle u, e_i \rangle$.
- ▶ Le produit scalaire et la norme sont donnés par :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ et } \|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

En d'autres termes, si on note $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\langle u, v \rangle = (X|Y)$ si on note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi, lorsqu'on utilise les relations vectoriel/matriciel dans une base **orthonormée**, le produit scalaire sur E correspond au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

↪ *Exercice 4*

B. SUPPLÉMENTAIRE ORTHOGONAL

Théorème 22

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
On a $F \oplus F^\perp = E$.
On dit que F^\perp est la *supplémentaire orthogonale* de F dans E .

Corollaire 23

On suppose que E est un espace euclidien et F est un sous-espace vectoriel de E .
Alors $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

- ▶ On a dans ce cas $(F^\perp)^\perp = F$ (car on a une inclusion et l'égalité des dimensions).
- ▶ Si H est un hyperplan d'un espace euclidien E alors $\dim(H^\perp) = 1$.
On appelle *vecteur normal* à H tout vecteur u non nul de E , orthogonal à H .
Dans ce cas, (u) est une base de H^\perp .

Corollaire 24

On suppose que E est un espace euclidien et F est un sous-espace vectoriel de E .
Toute famille obtenue en concaténant une base orthonormée de F et une base orthonormée de F^\perp est une base orthonormée de E .

↪ Exercice 5

C. PROJECTION ORTHOGONALE

Définition 25

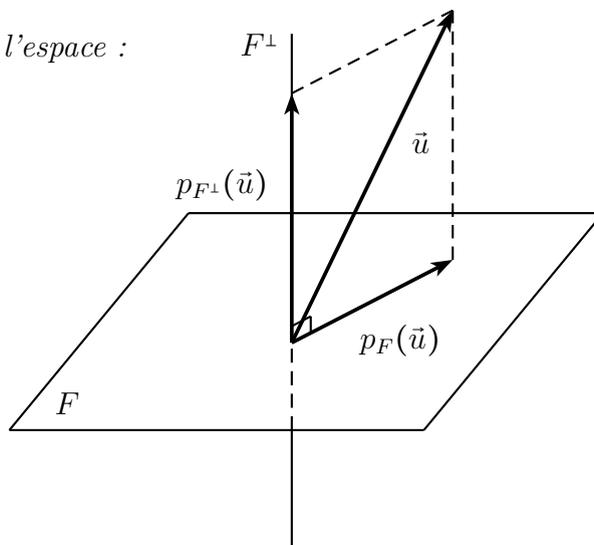
Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
On appelle *projection orthogonale sur F* le projecteur sur F parallèlement à F^\perp c'est-à-dire l'endomorphisme de E défini par :

$$p_F : \begin{cases} E = F \oplus F^\perp & \longrightarrow & E \\ u = v + w & \longmapsto & v \end{cases} \quad \text{où } (v, w) \text{ est l'unique couple de } F \times F^\perp \text{ tel que } u = v + w.$$

Pour $u \in E$, on dit que $p_F(u)$ est la *projeté orthogonale* de u sur F .

La projection orthogonale sur F^\perp est $p_{F^\perp} = Id_E - p_F$.

Illustration graphique dans l'espace :



Proposition 26 (Calcul du projeté orthogonal)

Soit F un sous-espace vectoriel de E , de dimension finie. Soit $u \in E$.

- Soit $v \in E$. On a l'équivalence :

$$v = p_F(u) \Leftrightarrow v \in F \text{ et } u - v \in F^\perp.$$

- Soit (e_1, \dots, e_p) une base orthonormée de F .

On a $p_F(u) = \sum_{i=1}^p \langle u, e_i \rangle e_i$.

Pour tout $u \in E$, on a $p_{F^\perp}(u) = (\text{Id}_E - p_F)(u) = u - \sum_{i=1}^p \langle u, e_i \rangle e_i$.

Dans le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, on a pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$u'_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, e_i \rangle e_i = p_{\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})^\perp}(u_k)$$

car (e_1, \dots, e_{k-1}) est une base orthonormée de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$.

Ainsi, le procédé d'orthonormalisation de Schmidt consiste à projeter le k -ème vecteur sur l'orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs déjà construits puis à normaliser.

Théorème 27 (Minimisation de la norme)

Soit F un sous-espace vectoriel de E , de dimension finie.

Soit $u \in E$. On a $\|u - p_F(u)\| = \min_{v \in F} \|u - v\|$.

De plus, $p_F(u)$ est le seul vecteur v_0 de F tel que $\|u - v_0\| = \min_{v \in F} \|u - v\|$.

Pour deux vecteurs u et v de E , le réel $\|u - v\|$ est la *distance entre u et v* .

Ainsi, on peut dire que $p_F(u)$ est le vecteur de F qui est à la distance la plus petite de u .

Définition 28

Soit $u \in E$. Soit F un sous-espace vectoriel de E , de dimension finie.

On appelle *distance de u à F* et on note $d(u, F)$ le réel $d(u, F) = \min_{v \in F} \|u - v\| = \|u - p_F(u)\|$.

Comme $u - p_F(u) \perp p_F(u)$, on a par le théorème de Pythagore :

$$\|u\|^2 = \|u - p_F(u)\|^2 + \|p_F(u)\|^2$$

d'où

$$(d(u, F))^2 = \|u\|^2 - \|p_F(u)\|^2.$$

↪ *Exercice 6*