
ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

Exercices - Révisions PCSI - Corrigé sur Hugoprépa

1 Produits scalaires et normes euclidiennes

Montrer que les applications suivantes définissent un produit scalaire sur le \mathbb{R} -espace vectoriel E et donner l'expression générale de la norme euclidienne associée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Pour tout $(A, B) \in E^2$, $\varphi(A, B) = \text{tr}(A^T B)$.
2. $E = \mathbb{R}_n[X]$
Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.
Pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\psi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$.
3. $E = \mathbb{R}[X]$
Pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\langle P|Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$.

2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec le cas d'égalité (on pourra s'aider du cours de PCSI).

2. *Application 1* : Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .
On suppose que $X(\Omega)$ est un sous-ensemble fini de \mathbb{R} de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique, montrer que $|E(X)| \leq \sqrt{E(X^2)}$.
Retrouver ce résultat en utilisant la variance de X .

3. *Application 2* : Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.
À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $(f(x))^2 \leq x \int_0^x (f'(t))^2 dt$.
En déduire que $\int_0^1 (f(x))^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (f'(t))^2 dt$.

3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

On se place sur \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique.

Soit $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$ et $u_3 = (1, 1, -1)$.

Orthonormaliser la famille (u_1, u_2, u_3) à l'aide du procédé de Gram-Schmidt (après avoir justifié qu'elle vérifie l'hypothèse nécessaire).

Justifier que la famille obtenue est une base orthonormée de \mathbb{R}^3 (c'est-à-dire à la fois une base de \mathbb{R}^3 et une famille orthonormée).

4 Bases orthonormées

On se propose, dans cet exercice, de démontrer la formule de Taylor pour les polynômes.

Soit n un entier naturel et a un réel.

On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a).$$

1. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note $P_i = (X - a)^i$.
Montrer que la famille (P_0, P_1, \dots, P_n) est une famille orthogonale de E .
2. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, calculer $\|P_i\|$. En déduire une base orthonormée \mathcal{B} de E .
3. Exprimer les coordonnées d'un polynôme P de E dans cette base \mathcal{B} , à l'aide des dérivées successives de P en a .
En déduire la formule de Taylor pour les polynômes c'est-à-dire :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

5 Supplémentaire orthogonal

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, (A|B) = \text{tr}(A^T B).$$

On note \mathcal{S}_n le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et \mathcal{A}_n celui de matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n \subset (\mathcal{A}_n)^\perp$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire que $\mathcal{S}_n = (\mathcal{A}_n)^\perp$.

6 Projection orthogonale

On souhaite déterminer l'existence et la valeur de $\Delta = \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$.

On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

1. Montrer que $\Delta = \left(d(X^2, F)\right)^2$ où $F = \text{Vect}(1, X)$.
2. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur F de deux façons :
 - en utilisant la caractérisation du projeté orthogonal (*Proposition 26*, premier point)
 - en orthonormalisant une base de F (*Proposition 26*, deuxième point).
3. En déduire la valeur de Δ .