Corrigé du devoir à la maison facultatif n ° 7
Centrale TSI 2007

I Exercice I : Latitude de mise au point d'un microscope. Centrale TSI 2007

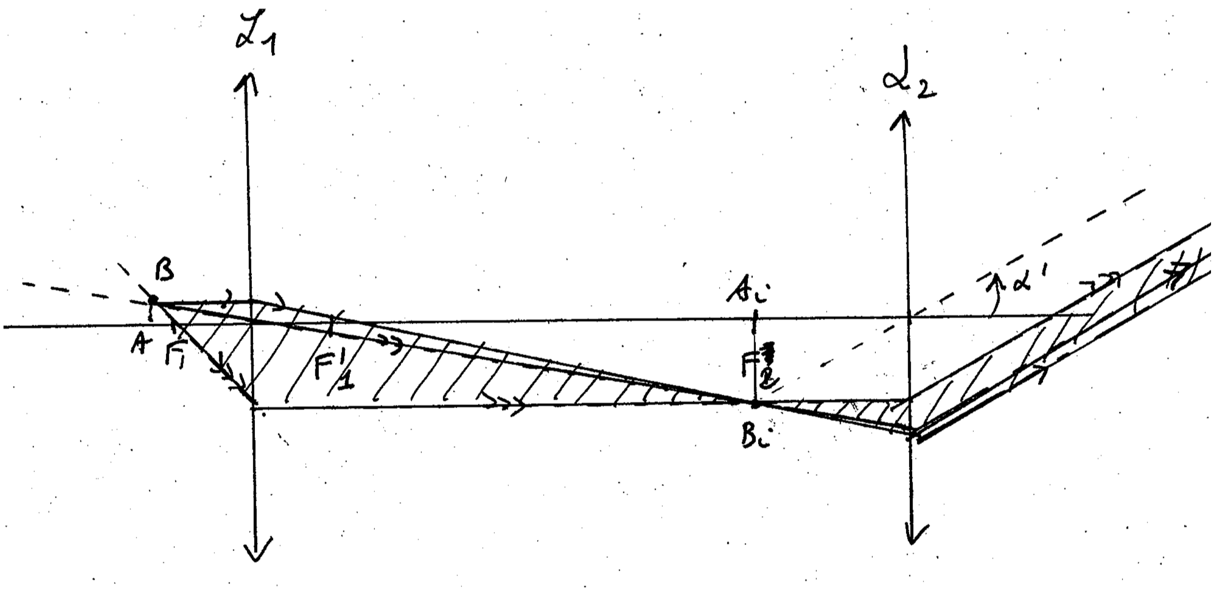
I.A

I.A.1. A doit être placé de manière à ce que l'image intermédiaire se forme au foyer principal objet de la lentille L_2. F_2 doit donc être l'image de A par la lentille L_1. Avec la formule de Newton on a donc $\overline{F_1'F_2}.\overline{F_1A} = -{f_1'}^2$, d'où $\overline{F_1A} = -\dfrac{{f_1'}^2}{\overline{F_1'F_2}} = -\dfrac{{f_1'}^2}{\Delta} = -0{,}1\,\text{mm}$.

A doit donc être placé 0,1 mm en avant de F_1'.

I.A.2. Cf. figure suivante sur laquelle on a tracé en utilisant les règles habituelles de l'optique géométrique la marche de trois rayons issus de B : celui partant parallèlement à l'axe optique, celui passant par le centre optique de la lentille, et celui passant par le foyer principal objet de la L_1. On a noté A_iB_i l'image intermédiaire dans le plan focal objet de L_2.

On n'a pas représenté la droite permettant de définir l'angle α pour ne pas alourdir la figure.



I.A.3. Sur la figure précédente on voit que $\alpha' = -\dfrac{\overline{A_iB_i}}{f_2'}$. Mais $\overline{A_iB_i} = f_1'\dfrac{\overline{AB}}{\overline{F_1A}}$, d'où $\alpha' = -\dfrac{f_1'}{f_2'}\dfrac{\overline{AB}}{\overline{F_1A}}$. Par ailleurs $\overline{F_1A} = -\dfrac{{f_1'}^2}{\Delta}$ et donc $\alpha' = \dfrac{f_1'}{f_2'}\dfrac{\overline{AB}\Delta}{{f_1'}^2} = \dfrac{\overline{AB}\Delta}{f_1'f_2'}$.

Par ailleurs on a $\alpha = -\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AF_2'}} = -\dfrac{\overline{AB}}{\Delta + 2f_1' + 2f_2' + \overline{AF_1}} = -\dfrac{\overline{AB}}{\Delta + 2f_1' + 2f_2' + \frac{{f_1'}^2}{\Delta}} =$

$-\dfrac{\overline{AB}\Delta}{\Delta^2+2\Delta(f_1'+f_2')+f_1'^2}$.

On arrive donc à $G=\dfrac{\alpha'}{\alpha}=-\dfrac{\overline{AB}\Delta}{f_1'f_2'}\dfrac{\Delta^2+2\Delta(f_1'+f_2')+f_1'^2}{\overline{AB}\Delta}=-\dfrac{\Delta^2+2\Delta(f_1'+f_2')+f_1'^2}{f_1'f_2'}=$
$-\left(\dfrac{\Delta^2}{f_1'f_2'}+2\dfrac{\Delta}{f_1'}+2\dfrac{\Delta}{f_2'}+\dfrac{f_1'}{f_2'}\right)$.

L'application numérique donne $G=-6{,}2\times10^2$. Il faut commenter la grande valeur absolue de ce grossissement ! Le microscope joue bien son rôle !

On trouve un signe négatif, car l'image est inversée.

I.B

L'image finale A_f peut au pire se former 25 cm en avant de l'oeil, soit 25 cm en avant de F_2'. Il suffit d'utiliser le principe de retour inverse de la lumière pour trouver la position de l'objet initial.

L'image intermédiaire est telle que $\overline{F_2A_i}.\overline{F_2'A_f}=-f_2'^2$, d'où $\overline{F_2A_i}=-\dfrac{f_2'^2}{\overline{F_2'A_f}}=-\dfrac{25^2}{-250}=$ 2,5 mm.

De même $\overline{F_1A}.\overline{F_1'A_i}=-f_1'^2$. Or $\overline{F_1'A_i}=\Delta+\overline{F_2A_i}=252{,}5$ mm et donc $\overline{F_1A}=-\dfrac{f_1'^2}{\overline{F_1'A_i}}=$ $-\dfrac{5^2}{252,5}=-0{,}099$ mm (il faut impérativement se donner plus de chiffres significatifs si on veut arriver à une conclusion...)

On voit donc que la latitude de mise au point est excessivement faible, puis qu'elle s'étend de 1 mm en avant de F_1 à 0,099 mm en avant, soit 1 μm de longueur ! !

II Partie II : Lentille magnétique

II.A

La force qui s'exerce sur l'électron est la force de Lorentz $\overrightarrow{F}=-e\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B}$. Initialement la vitesse étant portée par $\overrightarrow{u}_z$, seule la composante radiale (négative) du champ magnétique va intervenir pour donner une force selon $+\overrightarrow{u}_\theta$, d'où la création d'un mouvement de rotation autour de Oz. Mais cette composante de vitesse selon $\overrightarrow{u}_\theta$ est à l'origine d'une composante de la force selon $-\overrightarrow{u}_r$ (d'où l'aspect focalisant), et également selon $-\overrightarrow{u}_z$.

II.B

Le champ magnétique est à flux conservatif. Le cylindre proposé est limité par une surface fermée. Le flux à travers cette surface est donc nul. Cela se traduit ici (avec r très petit...) par $\pi r^2B_z(0,z+\mathrm{d}z)-\pi r^2B_z(0,z)+2\pi rB_r(r,z)=0$, soit $r\dfrac{\partial B_z(0,z)}{\partial z}\mathrm{d}z+2B_r(r,z)=0$, d'où le résultat demandé.

Dans la suite pour clarifier on pose $f(z)=\dfrac{\partial B_z(0,z)}{\partial z}$.

II.C

II.C.1. On obtient facilement :
- sur $\overrightarrow{u}_r$: $m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=-er\dot{\theta}B_z(0,z)$.
- sur $\overrightarrow{u}_\theta$: $m\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)=-e\left(B_r(r,z)\dot{z}-\dot{r}B_z(0,z)\right)$.
- sur $\overrightarrow{u}_z$: $m\ddot{z}=er\dot{\theta}B_r(r,z)$.

Remarque on a pris la composante B_z sur l'axe car r est supposé très "petit"...

II.C.2. Si on multiplie les deux membres de l'égalité traduisant la projection selon $\overrightarrow{u}_\theta$ par r il vient $m\left(r^2\ddot{\theta}+2R\dot{r}\dot{\theta}\right)=-er\left(B_r(r,z)\dot{z}-\dot{r}B_z(0,z)\right)$.

Le membre de gauche est en fait $m\dfrac{\mathrm{d}\left(r^2\dot{\theta}\right)}{\mathrm{d}t}$.

Avec la notation $f(z)$ introduite plus haut le membre de droite s'écrit, en utilisant également le résultat de II.B : $\dfrac{e}{2}\left(r^2f'(z)\dot{z}+2r\dot{r}f(z)\right)$. On y reconnait la dérivée par rapport au temps de $r^2f(z(t))$. Le membre de droite s'écrit donc $\dfrac{\mathrm{d}\left(\frac{e}{2}r^2B_z(0,z)\right)}{\mathrm{d}t}$.

On a donc pour finir $m\dfrac{\mathrm{d}\left(r^2\dot{\theta}\right)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\left(\frac{e}{2}r^2B_z(0,z)\right)}{\mathrm{d}t}$.

Par intégration par rapport au temps il vient donc bien $\left(r^2\dot{\theta}\right)-\left(\dfrac{e}{2m}r^2B_z(0,z)\right)=K$.

II.D

Dans ces zones l'électron n'est soumis à aucune force. La trajectoire est alors rectiligne (le mouvement y est rectiligne uniforme).

II.E

II.E.1. On évalue la constante en utilisant l'expression de II.C.2 à $t=0$, date à laquelle $r=0$ et $\dot{\theta}=0$, ce qui montre directement que $K=0$. On en déduit $\dot{\theta}=\dfrac{e}{2m}B_z(0,z)$

II.E.2. La projection sur Oz peut alors s'écrire $m\ddot{z}=er\dot{\theta}B_r(r,z)=-\dfrac{e^2r^2}{4m}B_z(0,z)\dfrac{\partial B_z(0,z)}{\partial z}$.
Ceci montre que $\ddot{z}$ est d'ordre 2 en r.
On écrira donc $\ddot{z}=0$, soit $\dot{z}=Cte=v_0\cos\alpha\simeq v_0$ d'après l'indication de l'énoncé.

II.E.3. Il vient $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\times\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z}=\dfrac{\dot{\theta}}{\dot{z}}=\dfrac{e}{2mv_0}B_z(0,z)$.

Il vient alors $\Delta\theta=\displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}}\mathrm{d}\theta$. On se limite à l'intégrale sur $\left[-\dfrac{L}{2},\dfrac{L}{2}\right]$, car ailleurs $\mathrm{d}\theta=0$.

Soit $\Delta\theta=\dfrac{e}{2mv_0}\displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}}B_z(0,z)\mathrm{d}z$

II.F

II.F.1. On réalise la consigne de l'énoncé pour obtenir $\ddot{r}=-\dfrac{re^2B_z^2(0,z)}{4m^2}$.

II.F.2. Il vient $\dot{r}=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=v_0\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}$.

Puis $\ddot{r}=\dfrac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=v_0\dfrac{\mathrm{d}\left(v_0\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)}{\mathrm{d}z}=v_0^2\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}z^2}$. En reportant dans l'expression de II.F.1, il vient alors $v_0^2\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}z^2}=-\dfrac{re^2B_z^2(0,z)}{4m^2}$. Cette expression n'a de sens que dans zone où le champ magnétique est non nul bien sûr.

II.G

II.G.1. Les trajectoires étant rectilignes uniformes entre A et l'entrée dans le champ, et entre la sortie du champ et A' on a donc facilement $\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)_A = \dfrac{r_0}{a}$ et $\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)_{A'} = -\dfrac{r_0}{b}$

II.G.2.

(a) On s'exécute... Ce qui donne $\displaystyle\int_A^{A'} \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{d}z = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)_{A'} - \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)_A = -\frac{r_0}{b} - \frac{r_0}{a}$, d'une part et d'autre part $\displaystyle\int_A^{A'} \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{d}z = \int_{-L/2}^{+L/2} -\frac{re^2 B_z^2(0,z)}{4m^2v_0^2}\mathrm{d}z$.

(b) Si on peut considérer $r = r_0$ dans la zone où règne le champ magnétique il vient alors $\displaystyle\int_A^{A'} \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{d}z = -\frac{r_0 e^2}{4m^2v_0^2}\int_{-L/2}^{+L/2} B_z^2(0,z)\mathrm{d}z$

II.G.3.

(a) En utilisant les deux résultats précédents il vient donc $\displaystyle\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{e^2}{4m^2v_0^2}\int_{-L/2}^{+L/2} B_z^2(0,z)\mathrm{d}z$.

(b) Le résultat précédent ne fait pas intervenir α (dans la mesure où on peut considérer que $\cos\alpha = 1$). Autrement dit le point où la trajectoire va recouper l'axe sera toujours le même : toute particule passant par A passe par A'.

II.G.4. Effectuons une analogie avec l'optique géométrique dont la relation de conjugaison s'écrit $\dfrac{1}{p'} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{f'}$. Attention p et p' sont algébriques alors que pour nous a et b sont positifs. La relation de conjugaison s'écrira pour nous $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{f'}$. Par identification on posera donc $\displaystyle\frac{1}{f'} = \frac{e^2}{4m^2v_0^2}\int_{-L/2}^{+L/2} B_z^2(0,z)\mathrm{d}z$

II.H Cas particulier et application numérique

II.H.1.

(a) On a ici $\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} = -\dfrac{re^2 B_{z0}^2}{4m^2v_0}$. La solution (et la trajectoire donc) est sinusoïdale. Plus précisément $r(z) = \lambda\cos\left(\dfrac{eB_{z0}}{2mv_0}z\right) + \mu\sin\left(\dfrac{eB_{z0}}{2mv_0}z\right)$, où λ et μ sont des constantes d'intégration que l'on nous demande de ne pas calculer.

(b) La trajectoire commence par une portion rectiligne qui se raccorde de manière C_1 à une portion de sinusoïde (dont la concavité est vers le bas), qui elle même se raccorde de manière C_1 à un nouveau segment de droite.

II.H.2. (a) r sera très peu modifié sur la zone d'action du champ si L est très petite devant la période spatiale de la sinusoïde, soit $L \ll \dfrac{2\pi m v_0}{eB_{z0}}$.

(b) On calcule numériquement $\dfrac{2\pi m v_0}{eB_{z0}} = 53\,\mathrm{mm}$. On peut à la limite considérer que le critère est respecté.

II.H.3. La relation $\displaystyle\frac{1}{f'} = \frac{e^2}{4m^2v_0^2}\int_{-L/2}^{+L/2} B_z^2(0,z)\mathrm{d}z$ devient plus simple ici, à savoir $f' = \dfrac{4m^2v_0^2}{e^2 L B_{z0}^2} = 57\,\mathrm{mm}$.