5.2.2 Théorème de Gauss-Exercice 4

Une solution contient des particules sphériques, de charge Q, de rayon 10^{-8} à 10^{-6} m, appelées particules colloïdales. La solution contient aussi des cations de charge +e et des anions de charge –e supposés ponctuels. Autour d'une particule de centre O, les ions se répartissent avec les densités particulaires :

$n_+(r) = n_0 e^{-\frac{eV(r)}{kT}}$ pour les cations et $n_-(r) = n_0 e^{\frac{eV(r)}{kT}}$ pour les anions

n_0 est une constante dépendant du nombre total d'ions en solution, V(r) est le potentiel électrostatique à une distance r de O, T est la température du milieu et $k = 1{,}38.10^{-23}$ $J.K^{-1}$ est la constante de Boltzmann.
Dans l'eau, la seule modification des équations de l'électrostatique par rapport à celles du vide est le remplacement de ε_0 par $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$. On supposera que $eV(r) << kT$.

a-Exprimer la densité volumique de charge ρ(r) des ions autour de la particule.

b-En utilisant les équations locales de l'électrostatique, montrer que le potentiel électrostatique V(r) vérifie l'équation $\Delta V(r) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon}$ appelée équation de Poisson.

c-Résoudre cette équation pour la fonction rV(r) en faisant apparaitre une longueur caractéristique.
En déduire le champ électrostatique autour de la particule.

d-Comparer l'interaction entre deux particules colloïdales en l'absence ou en présence d'ions.

e-La stabilité de la solution colloïdale est assurée par la répulsion électrostatique des particules colloïdales.
Montrer qu'un excès d'ions provoqué par un ajout de sel est néfaste à cette stabilité.

Données :
- Pour un champ scalaire f : $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f) = \Delta f$
- Laplacien en coordonnées sphériques pour le champ scalaire f(r) : $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{d^2(rf)}{dr^2}$

---

a- $\rho = n_+ e + n_-(-e) = -2en_0 \,\mathrm{sh}\frac{eV}{kT}$ Or eV << kT donc : $\boxed{\rho(r) \approx -\frac{2e^2 n_0 V}{kT}}$

b- $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$ => $\boxed{\Delta V(r) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon}}$

c- $\frac{1}{r}\frac{d^2(rV)}{dr^2} = \frac{2e^2 n_0 V}{\varepsilon kT}$ donne : $\frac{d^2(rV)}{dr^2} - \frac{rV}{\delta^2} = 0$ avec $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon kT}{2e^2 n_0}}}$

Solution : $rV(r) = Ae^{-\frac{r}{\delta}} + Be^{\frac{r}{\delta}}$

Conditions aux limites : B = 0 pour que V ne diverge pas quand r tend vers l'infini

$A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}$ pour retrouver le potentiel d'une charge ponctuelle Q quand r tend vers 0

Donc : $\boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}e^{-\frac{r}{\delta}}}$ puis $\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r\delta}\right)e^{-\frac{r}{\delta}}\vec{u}_r}$

d-Sans ions : $\vec{E}' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{u}_r$ Donc : $\vec{F}'_{1\to 2} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{u}_r$

Avec ions : $\vec{F}_{1\to 2} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r\delta}\right)e^{-\frac{r}{\delta}}\vec{u}_r$

On a : $\left\|\vec{F}_{1\to 2}\right\| < \left\|\vec{F}'_{1\to 2}\right\|$ à cause de l'exponentielle, donc la répulsion est moins forte quand il y a des ions.

e-Excès d'ions => répulsion moins forte d'après la question 4
=> moins bonne stabilité de la solution
