

Corrigé du devoir surveillé n° 6

I Mines Ponts 2011 MP Partie I

I.A Mesure directe de la conductivité

- 1 Le flux de $\vec{j}$ à travers un cylindre d'axe Az , de rayon r et d'épaisseur ε donne accès à l'intensité i d'où $2\pi r \varepsilon j(t) = i$, soit

$$\vec{j} = \frac{i}{2\pi r \varepsilon} \vec{e}_r$$

D'après la loi d'Ohm locale on a donc $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{I}{2\pi r \gamma \varepsilon} \vec{e}_r$. On en déduit le potentiel $V = -\frac{i}{2\pi \gamma \varepsilon} \ln(r) + Cte$. La différence de potentiel demandée est donc

$$V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{2\pi \gamma \varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

- 2 Pour l'autre fil on a de même, en changeant i en $-i$ une différence de potentiel $V(M_1) - V(M_2) = -\frac{i}{2\pi \gamma \varepsilon} \ln\left(\frac{r'_2}{r'_1}\right)$. Par superposition il vient donc

$$V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{2\pi \gamma \varepsilon} \ln\left(\frac{r_2 r'_1}{r'_2 r_1}\right)$$

Sur la médiatrice du segment AD , $r = r'$, la différence de potentiel sera donc nulle. Le plan médiateur de AD définit une surface équipotentielle.

- 3 Prenons M_1 sur l'électrode A de rayon a et M_2 sur l'électrode D de rayon a également, avec M_1 et M_2 sur la droite AD et les plus proches possibles. On a alors $r_1 = a$, $r_2 = l - a$, $r'_1 = l - a$ et $r'_2 = a$. En reportant dans l'expression précédente il vient $V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{2\pi \gamma \varepsilon} \ln\left(\frac{(l-a)^2}{a^2}\right) \simeq \frac{i}{\pi \gamma \varepsilon} \ln\left(\frac{l}{a}\right)$. La résistance de la plaque est donc $R = \frac{1}{\pi \gamma \varepsilon} \ln\left(\frac{l}{a}\right)$ ce qui de la forme attendue en posant

$$R_0 = \frac{1}{\pi \gamma \varepsilon}$$

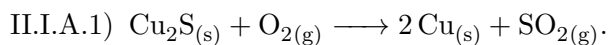
- 4 L'application numérique donne $R = 53 \text{ m}\Omega$ (on ne devrait même garder qu'un seul CS...) C'est une valeur difficile à mesurer avec le matériel dont on dispose au lycée. Mais des méthodes plus performantes existent !
- 5 Dans la configuration proposée on a $r_1 = r'_2 \simeq l$ et $r'_1 = r_2 \simeq \sqrt{2}l$, d'où en utilisant la relation précédente : $V(P) - V(Q) = \frac{i}{2\pi \gamma \varepsilon} \ln\left(\frac{2l^2}{l^2}\right) = \frac{i}{2\pi \gamma \varepsilon} \ln(2)$, soit

$$R_{//} = \frac{1}{2\pi \gamma \varepsilon} \ln(2)$$

II

II.I

II.I.A Obtention du cuivre métallique



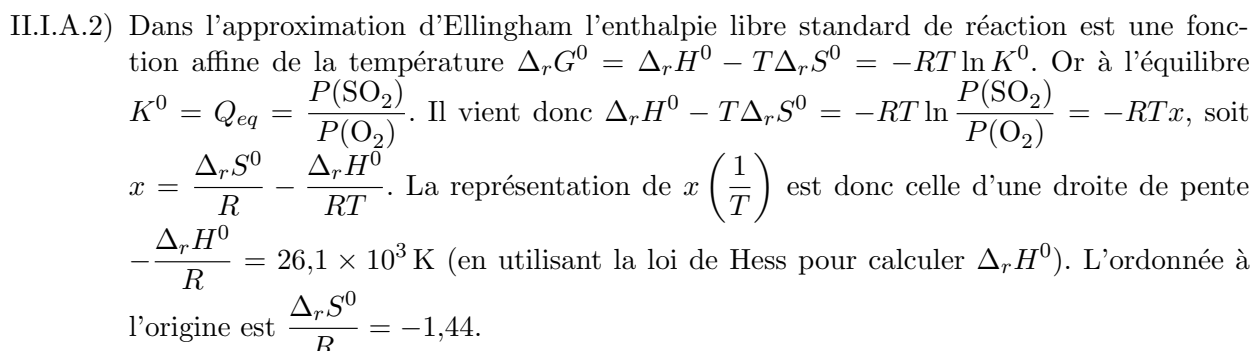
La variance est le nombre de paramètres intensifs indépendants que l'on peut fixer pour obtenir l'équilibre chimique.

Il y a a priori $X = 2 + 4 = 6$ paramètres intensifs (P , T et 4 fraction molaires), mais attention comme il n'y a pas de variation du nombre de moles à l'état gazeux la pression n'est pas un facteur d'équilibre. On restera donc à $X = 5$.

Le nombre de relations entre les paramètres intensifs est égal à 4 (1 pour la traduction de l'équilibre, 1 pour le fait que la somme des deux fractions molaires des gaz soit égale à 1, et 1 pour chacune des deux fractions molaires des deux solides soit égale à 1).

La variance est donc égale à $v = X - Y = 1$. Le système est monovariant. Autrement dit, si on fixe la température il n'y a qu'une seule pression possible pour laquelle le système sera à l'équilibre (et inversement...)

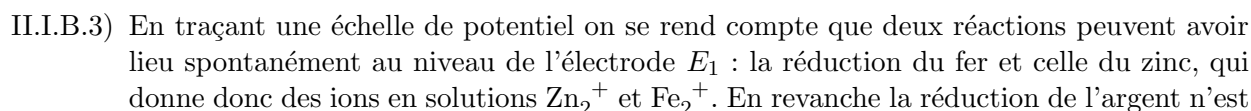
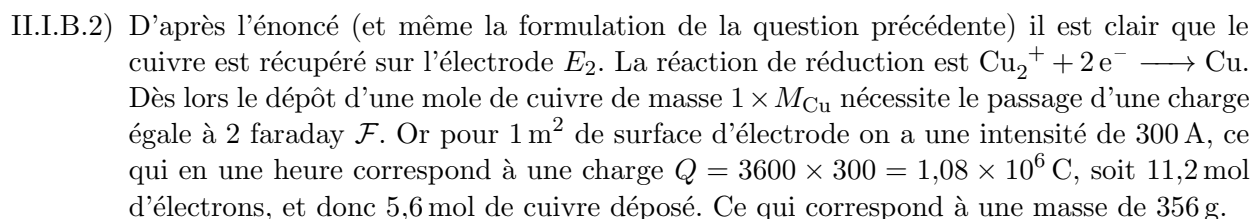
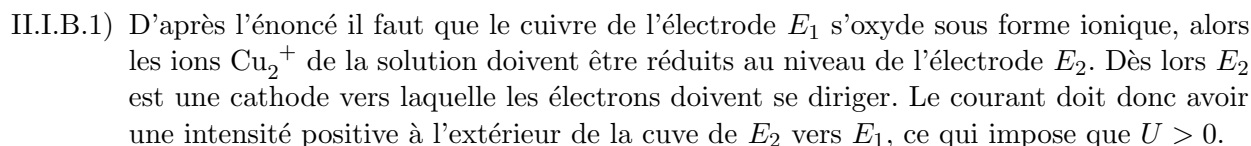
On se place à $P(\text{O}_2)$ car c'est la pression partielle du dioxygène dans l'air. Il n'y a donc aucune complication supplémentaire...



Sur ce schéma si on prend un point représentatif au dessus de la droite alors cela veut dire que le rapport des pressions partielles est supérieur à celui que l'on doit avoir pour qu'il y ait équilibre, autrement dit le quotient réactionnel est supérieur à la constante d'équilibre. Il y a rupture d'équilibre et la réaction a lieu dans le sens indirect ce qui fait disparaître le Cu. Autrement dit au-dessus de la droite on a le domaine d'existence exclusive du cuivre et en dessous celui du sulfure de cuivre.



II.I.B Raffinage du cuivre métallique



pas spontanée et nécessite une tension imposée de l'ordre de $0,80 - (-0,76) = 1,56 \text{ V}$, ce qui ne sera pas réalisé puisque l'énoncé impose $|U| < 0,4 \text{ V}$. L'argent solide tombera donc dans les boues.

II.II Le cuivre conducteur de l'électricité

II.II.A Modèle microscopique de la conduction électrique

- II.II.A.1) L'électron ne subissant que la force électrique $-e\vec{E}$, le principe fondamental de la dynamique, après une intégration et en tenant compte de la condition initiale permet d'écrire $\vec{v}(t) = \vec{v}_i - \frac{e}{m_e} \vec{E}t$.
- II.II.A.2) D'après l'indication de l'énoncé il est clair que $\langle \vec{v}_i \rangle = \vec{0}$. Le passage à la valeur moyenne de la relation précédente permet donc d'écrire : $\langle \vec{v} \rangle = -\frac{e}{m_e} \vec{E}\tau$.
- II.II.A.3) On exprime alors le vecteur densité de courant électrique volumique $\vec{j}$ (en fait plutôt sa valeur moyenne...) d'après la définition : $\vec{j} = \bar{n}(-e)\langle \vec{v} \rangle = \frac{\bar{n}e^2}{m_e} \vec{E}\tau$, ce qui par identification avec la loi d'Ohm donne $\gamma_{\text{Cu}} = \frac{\bar{n}e^2\tau}{m_e}$.
- Dans un volume $\mathcal{V}$ de masse $\rho_{\text{Cu}}\mathcal{V}$, on trouve y donc $\frac{\rho_{\text{Cu}}\mathcal{V}}{M_{\text{Cu}}}\mathcal{N}_A$ d'atomes de cuivre, soit $\bar{n} = \frac{\rho_{\text{Cu}}}{M_{\text{Cu}}}\mathcal{N}_A$. On a donc pour conclure $\gamma_{\text{Cu}} = \frac{\rho_{\text{Cu}}e^2\tau\mathcal{N}_A}{m_e M_{\text{Cu}}}$.
- II.II.A.4) Il vient $\tau = \frac{\gamma_{\text{Cu}}m_e M_{\text{Cu}}}{\rho_{\text{Cu}}e^2\mathcal{N}_A} = 2,49 \times 10^{-14} \text{ s}$, et donc $f_c = 4 \times 10^{13} \text{ Hz}$. Cette fréquence est très élevée puisqu'on est juste en dessous du domaine des ondes visibles. Cela veut dire par ailleurs que pour les excitations habituelles du cuivre le régime transitoire sera terminé en quelques τ , et donc la loi d'Ohm vérifiée.
- II.II.A.5) Plus la conductivité est grande moins une onde pénètre dans le métal et donc plus elle est réfléchiée. Ici il y aura dans la lumière visible réfléchiée plus de rouge que de bleu d'où la couleur du cuivre "rouge cuivrée"...
- II.II.A.6) Si la température augmente l'agitation thermique aussi, les chocs aussi, dont τ diminue, et la conductivité doit ainsi diminuer.

III Production de champ magnétique intense et homogène

- I.1 En un point d'un plan d'antisymétrie d'une distribution de courant, le vecteur densité de courant électrique volumique doit être orthogonal à ce plan. Dès lors ici on doit avoir $\vec{j} = j_\theta \vec{e}_\theta$.
- I.2 En ce même point le champ magnétique doit appartenir au plan d'antisymétrie. Dès lors $B_\theta = 0$.
- I.3 Par superposition le champ magnétique à l'extérieur de la distribution est nul. En effet on peut voir cette distribution comme une superposition de solénoïdes dont le rayon varierait de R_1 à R_2 , chacun créant à leur extérieur, et donc pour $r > R_2$ un champ nul. On conclut par le principe de superposition.
- L'étude des symétrie dans cette configuration montre que le champ magnétique est porté uniquement par $\vec{e}_z$. En prenant le même type de contour qu'en cours on établit facilement que pour $r \in [R_1; R_2]$, $B = \mu_0 j_\theta (R_2 - r)$ et $r \in [0; R_1]$, $B = B_0 = \mu_0 j_\theta (R_2 - R_1)$. On constate que le champ est uniforme pour $r < R_1$ (ce qui était prévisible là aussi par superposition).

I.4 La puissance volumique est $\mathcal{P}_V = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j_\theta^2}{\sigma}$, expression valide uniquement pour $r \in [R_1; R_2]$ (ailleurs elle est bien sûr nulle).

La puissance totale $\mathcal{P}$ s'obtient simplement en multipliant $\mathcal{P}_V$ par le volume $L\pi(R_2^2 - R_1^2)$ (car la puissance volumique est uniforme), soit $\mathcal{P} = \frac{j_\theta^2}{\sigma} L\pi(R_2^2 - R_1^2)$.

En fonction de B_0 , cette puissance s'écrit $\mathcal{P} = \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \sigma} L\pi \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{(R_2 - R_1)^2} = \pi L \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \sigma} \frac{(R_2 + R_1)}{(R_2 - R_1)}$.

I.5 L'expression précédente montre clairement que la puissance est une fonction croissante de R_1 . On a donc intérêt à prendre $R_1 = 0$ pour la minimiser.

I.6 Avec donc $R_1 = 0$, l'application numérique donne $\mathcal{P} = 56 \text{ kW}$, soit presque 30 radiateurs d'une puissance de l'ordre de 2 kW.

I.7 Si on fixe $R_1 = 0$, alors la puissance ne dépend plus de R_2 à B_0 fixé ! Cela est dû au fait que $B_0 = \mu_0 j_\theta R_2$, donc $j_\theta \propto \frac{1}{R_2}$. La puissance volumique est alors proportionnelle à $\frac{1}{R_2^2}$, alors que le volume total est proportionnel à R_2^2 . Il y a compensation des deux effets.

Mais si on pousse l'étude un peu plus loin, en régime permanent la totalité de la puissance dissipée par effet Joule doit sortir du système par sa surface. Même si on n'a pas vu encore les lois correspondantes il est raisonnable de penser que l'on aura intérêt à prendre cette surface, et donc R_2 la plus grande possible.

I.8 Pour que le courant parcoure la totalité de la surface du cylindre il faut nécessairement que les spires soient un peu inclinées. La propriété de I.1 n'est donc pas vérifiée. On a intérêt à prendre un rayon R_1 et le diamètre d du fil tels que $\frac{d}{R_1} \ll 1$ pour que l'inclinaison soit la plus faible possible.

IV Chimie MPI*

IV.A Diagramme de distribution de l'acide citrique

1°) La courbe qui part de 100% et décroît à partir de $pH = 1$ est nécessairement le triacide H_3A . On a alors la courbe 2 qui correspond à H_2A^- , la 3 à HA_2^- et enfin 4 à A_3^- .

2°) À l'intersection des courbes 1 et 2 on lit $pK_{A1} = 3,2$, soit $K_{A1} = 10^{-3,2} = 6,3 \times 10^{-4}$.

De même à l'intersection des courbes 2 et 3 on lit $pK_{A2} = 4,8$, soit $K_{A2} = 10^{-4,8} = 1,6 \times 10^{-5}$.

En enfin à l'intersection des courbes 3 et 4 on lit $pK_{A3} = 6,4$, soit $K_{A1} = 10^{-6,4} = 4,0 \times 10^{-7}$.

3°) Par lecture graphique $[HA_2^-] = 0,7 \times c = 1,4 \times 10^{-2} \text{ mol/L}$, $[A_3^-] = 0,24 \times c = 0,47 \times 10^{-2} \text{ mol/L}$ et $[H_2A^-] = 0,06 \times c = 1,2 \times 10^{-3} \text{ mol/L}$.

L'espèce H_3A est ultraminoritaire. On va déterminer sa concentration en utilisant la constante d'équilibre $K_{A1} = \frac{[HA_2^-][H_3O^+]}{[H_3A]}$, soit $[H_3A] = \frac{[HA_2^-][H_3O^+]}{K_{A1}} = 2,2 \times 10^{-5} \text{ mol/L}$.

4°) (a) Également par lecture graphique le domaine dans lequel H_3A est présent à moins de 10% est $[4,3; 14]$.

(b) Toujours par lecture graphique le domaine dans lequel HA_2^- est présent à plus de 60% est $[5,6; 2]$.

IV.B Réaction acide-base

1°) et 1) bis : cf. figure en annexe.

2°) Les espèces présentes initialement ont été repérées sur l'échelle d'acidité.

- (a) L'acide le plus fort présente est HNO_2 , la base la plus forte φO^- , d'où la réaction $\text{HNO}_2 + \varphi\text{O}^- \longrightarrow \text{NO}_2^- + \varphi\text{OH}$, de constante d'équilibre $K = \frac{10^{-3,3}}{10^{-9,9}} = 10^{6,6} = 4 \times 10^6$.
- (b) L'acide le plus fort présente est HF , la base la plus forte ClO^- , d'où la réaction $\text{HF} + \text{ClO}^- \longrightarrow \text{F}^- + \text{ClOH}$, de constante d'équilibre $K = \frac{10^{-3,2}}{10^{-7,5}} = 10^{4,3} = 2 \times 10^4$.
- (c) L'acide le plus fort présente est NH_4^+ , la base la plus forte φCOO^- , d'où la réaction $\text{NH}_4^+ + \varphi\text{COO}^- \longrightarrow \text{NH}_3 + \varphi\text{COOH}$, de constante d'équilibre $K = \frac{10^{-9,2}}{10^{-4,2}} = 10^{-5} = 1 \times 10^{-5}$.
- (d) L'acide le plus fort présente est HBrO , la base la plus forte CH_2COO^- , d'où la réaction $\text{HBrO} + \text{CH}_2\text{COO}^- \longrightarrow \text{BrO}^- + \text{CH}_3\text{COOH}$, de constante d'équilibre $K = \frac{10^{-8,7}}{10^{-4,7}} = 10^{-4} = 1 \times 10^{-4}$.