5.4 Equations de Maxwell-Exercice 1

A-Condensateur plan

Les armatures d'un condensateur plan sont deux disques métalliques de rayon a et d'axe Oz , de cotes respectives $-h$ et h . Négligeant les effets de bord et supposant un régime « lentement variable », on admet que le champ électrique est, dans tout le volume du condensateur, uniforme et non permanent : $\vec{E} = E(t)\vec{u}_z$.

On étudie le système pendant la décharge du condensateur à travers un circuit extérieur au cours de laquelle $E(t)$ évolue selon la loi : $E(t) = E_0 \exp(-t/\tau)$.

a-On cherche le champ magnétique correspondant sous la forme : $\vec{B} = B(r, t)\vec{u}_\theta$.

Grâce au théorème d'Ampère généralisé, donner l'expression de B en fonction de E , r et τ .

b-En un point du volume du condensateur exprimer, en fonction de r et de $\lambda = c\tau$, le rapport $\mu = u_B/u_E$ des contributions électrique et magnétique à la densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em} .

c-Montrer que, pour un régime lentement variable, il est bien légitime de considérer un condensateur comme un système « purement électrique ». Proposer des ordres de grandeur d'application numérique pour du matériel disponible en travaux pratiques.

d-Donner l'expression en fonction de E , r et τ du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ en un point intérieur au condensateur et commenter la direction de celui-ci.

e-Donner l'expression du flux P de $\vec{\Pi}$ à travers le cylindre de rayon a et de hauteur $2h$ qui délimite le condensateur en fonction de E , τ et du volume V de ce cylindre.

Interpréter le résultat précédent à l'aide d'un bilan énergétique.

B-Solénoïde long

On s'intéresse à une longueur ℓ d'un long solénoïde circulaire d'axe Oz et de rayon a dans lequel on suppose qu'est établi le champ magnétique : $\vec{B} = B(t)\vec{u}_z$ avec $B(t) = B_0 \exp(-t/\tau)$.

En transposant complètement le problème précédent, montrer qu'un champ électrique orthoradial s'établit dans le système mais que, en régime lentement variable, la contribution magnétique à l'énergie est nettement prépondérante. Calculer également le flux du vecteur de Poynting et effectuer un bilan énergétique.

5.4 Equations de Maxwell-Exercice 1

A-Condensateur plan

a- $\vec{B} = B(r, t)\vec{u}_\theta$ est orthoradial $\Rightarrow$ on applique le théorème d'Ampère généralisé sur le cercle de rayon r

$$\int_{\text{cercle}} \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0 + \varepsilon_0 \mu_0 \iint_{\text{disque de rayon } r} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (I = 0 \text{ dans le volume vide intérieur au condensateur})$$

Soit : $2\pi r B(r, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{dE}{dt} \pi r^2$ avec : $\frac{dB}{dt} = -\frac{E}{\tau}$ et $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ D'où : $B(r, t) = -\frac{rE}{2c^2\tau}$

b- $\mu = \frac{\frac{B^2}{2\mu_0}}{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2} = \frac{c^2 B^2}{E^2}$ donc : $\mu = \left(\frac{r}{2\lambda}\right)^2$ avec : $\lambda = c\tau$

c- En ARQS : $a \ll \lambda$ d'où $\mu \ll 1$ puis $u_E \gg u_B$. L'énergie est principalement électrique.

A.N : $R = 1 \text{ k}\Omega$; $C = 10 \text{ nF}$; $\tau = RC = 10^{-5} \text{ s}$; $\lambda = 3000 \text{ m}$. On a bien $\lambda \gg a \approx 10^{-2} \text{ m}$

d- $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_\theta}{\mu_0} = -\frac{EB}{\mu_0} \vec{u}_r$ donc : $\vec{\Pi} = \frac{r\varepsilon_0 E^2}{2\tau} \vec{u}_r$

Le vecteur de Poynting est dirigé vers l'extérieur du condensateur. C'est normal car le condensateur se décharge donc l'énergie électromagnétique sort du condensateur.

e- $P = \oiint_{\text{cylindre}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{surface latérale}} \frac{a\varepsilon_0 E^2}{2\tau} \vec{u}_r \cdot dS\vec{u}_r = \frac{a\varepsilon_0 E^2}{2\tau} \cdot 2\pi a \cdot 2h$ donc : $P = \frac{V\varepsilon_0 E^2}{\tau}$ car $V = \pi a^2 \cdot 2h$

Energie électromagnétique emmagasinée dans le condensateur : $U_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 V$

D'où : $\frac{dU_{em}}{dt} = \varepsilon_0 E \frac{dE}{dt} V = -\frac{\varepsilon_0 V E^2}{\tau}$. On vérifie l'équation de Poynting : $\frac{dU_{em}}{dt} + P = 0$

B-Solénoïde long

a- $\vec{E} = E(r, t)\vec{u}_\theta$ est orthoradial $\Rightarrow$ loi de Faraday sur le cercle de rayon r : $\int_{\text{cercle}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{\text{disque de rayon } r} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$

Soit : $2\pi r E(r, t) = -\frac{dB}{dt} \pi r^2$ avec : $\frac{dE}{dt} = -\frac{B}{\tau}$ et $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ D'où : $E(r, t) = \frac{rB}{2\tau}$

b- $\mu = \frac{c^2 B^2}{E^2}$ donc : $\mu = \left(\frac{2\lambda}{r}\right)^2$ avec : $\lambda = c\tau$

c- En ARQS : $a \ll \lambda$ d'où $\mu \gg 1$ puis $u_E \ll u_B$. L'énergie est principalement magnétique.

A.N : $R = 1 \text{ k}\Omega$; $L = 10 \text{ mH}$; $\tau = L/R = 10^{-5} \text{ s}$; $\lambda = 3000 \text{ m}$. On a bien $\lambda \gg a \approx 10^{-2} \text{ m}$

d- $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E\vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_z}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0} \vec{u}_r$ donc : $\vec{\Pi} = \frac{rB^2}{2\mu_0\tau} \vec{u}_r$

Le vecteur de Poynting est dirigé vers l'extérieur du solénoïde. C'est normal car le champ magnétique à l'intérieur diminue donc l'énergie électromagnétique sort du solénoïde.

e- $P = \oiint_{\text{cylindre}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{surface latérale}} \frac{aB^2}{2\mu_0\tau} \vec{u}_r \cdot dS\vec{u}_r = \frac{aB^2}{2\mu_0\tau} \cdot 2\pi a \cdot \ell$ donc : $P = \frac{VB^2}{\mu_0\tau}$ car $V = \pi a^2 \cdot \ell$

Energie électromagnétique emmagasinée dans le solénoïde : $U_{em} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} V$

D'où : $\frac{dU_{em}}{dt} = \frac{B}{\mu_0} \frac{dB}{dt} V = -\frac{VB^2}{\mu_0\tau}$. On vérifie l'équation de Poynting : $\frac{dU_{em}}{dt} + P = 0$