La piscine à vagues

On se propose dans ce problème d'étudier différentes techniques utilisées pour produire des vagues dans une piscine.

1 Utilisation d'une plaque oscillante

La première technique consiste à produire des ondes progressives à une extrémité de la piscine par déplacement horizontal d'un panneau métallique. La superposition de cette onde avec l'onde réfléchie à l'autre bout de la piscine produira une onde stationnaire.

1. On donne la relation liant la célérité c des vagues à la profondeur H de la piscine, la masse volumique ρ de l'eau, l'accélération de pesanteur g, la longueur d'onde λ et le cœfficient de tension superficielle A de l'interface eau – air.

$$c^2 = gH + \frac{4\pi^2 HA}{\rho\lambda^2}$$

Q1 (a) Quelle est la dimension de ρ ? En déduire celle de A.

(b) L'eau est-elle un milieu dispersif pour les vagues ?

(c) On néglige l'effet de la tension superficielle en posant $A = 0$, en déduire l'expression liant c à g et H.
Q2 Application numérique : calculer H pour obtenir $c = 4{,}0$ m.s^{-1}. On donne $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.

2. Onde incidente $z_i(x,t)$: les oscillations à la pulsation ω du plateau métallique permettent de produire une variation sinusoïdale de la hauteur $z(-L,t)$ du point de la surface de l'eau situé à l'extrémité gauche de la piscine, en $x = -L$ (Figure 1 ci-dessous). On posera $k = \frac{\omega}{c}$.

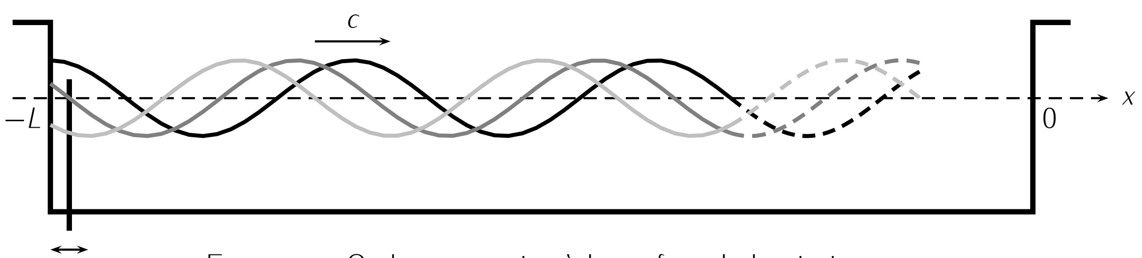


Figure 1 – Onde progressive à la surface de la piscine

On prend $z_i(-L,t) = Z_m.\cos(\omega t)$, la hauteur, à l'instant t, de l'eau au point de la piscine d'abscisse $x = -L$. Il apparait une onde progressive que l'on supposera sinusoïdale et se déplaçant sans atténuation dans le sens des x croissants à la célérité c.

(a) Déterminer $z_i(x,t)$ l'expression de l'onde progressive en fonction des données Z_m, ω, c et L, on justifiera
Q3 avec soin. Vérifier explicitement que votre formule appliquée en $x = -L$ donne bien l'expression proposée par l'énoncé ci-dessus pour $z_i(-L,t)$.

(b) Donner l'expression $z_i(x,\frac{T}{4})$ et tracer l'allure de l'onde incidente sur la piscine à $t = \frac{T}{4}$ où T est la
Q4 période (temporelle) d'oscillation de la plaque. On fera apparaitre la période de $z_i(x,\frac{T}{4})$ sur la figure.

3. Onde réfléchie $z_r(x,t)$: à l'extrémité d'abscisse $x = 0$ de la piscine, apparait une onde réfléchie de même amplitude Z_m et même célérité que l'onde incidente.

(a) Quel doit être de déphasage entre $z_i(0,t)$ et $z_r(0,t)$ pour qu'il y ait interférence constructive des deux
Q5 ondes en $x = 0$?

Q6 (b) En déduire l'expression du signal $z_r(0,t)$ puis de l'onde progressive $z_r(x,t)$.

4. Onde stationnaire $z(x,t)$: la superposition des deux ondes progressives $z_i(x,t)$ et $z_r(x,t)$ donne naissance à une onde stationnaire $z(x,t) = z_i(x,t) + z_r(x,t)$.

(a) Donner l'expression de $z(x,t)$ et l'écrire sous la forme $z(x,t) = f(x).g(t)$ où $f(x)$ et $g(t)$ sont des fonctions
Q7 dont on donnera l'expression.

(b) On veut qu'il apparaisse également un noeud de vibration en $x = -L$. En déduire la relation liant λ et
Q8 L.

(c) Représenter l'onde stationnaire à différents instants dans le cas où la condition précédente est respectée
Q9 et il y a uniquement quatre noeuds à la surface de la piscine.

(d) Pour le mode de vibration précédent, quelle devrait être la longueur L de la piscine si on prend $c = 4{,}0$
Q10 m.s^{-1} et une période d'oscillation de la plaque métallique $T = 1{,}0$ s ?

2 Utilisation d'injecteurs

La seconde technique consiste à utiliser des injecteurs convenablement placés et synchronisés.

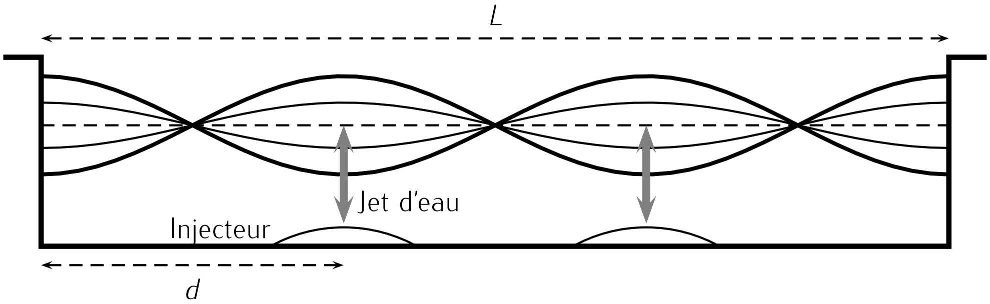


FIGURE 2 – Onde stationnaire à la surface de la piscine

Les injecteurs sont des dispositifs qui pulsent puis aspirent verticalement et alternativement de l'eau.Ils sont placés au fond de la piscine sous les ventres de vibration (Cf figure ci-dessus).
Un capteur de pression situé à une extrémité de la piscine permet de les synchroniser à une fréquence optimale f correspondant à un mode de vibration de l'onde stationnaire.

1. Placement des injecteurs : dans le mode représenté ci-dessus (Figure 2), on peut placer deux injecteurs.
Q11 À quelle distance d du bord de la piscine de longueur L doivent-ils être placés ?

2. Réglage des jets : on considère que les injecteurs sont réglés à la même fréquence f.

   (a) Pour le même mode, exprimer f en fonction de L et de la célérité c des ondes (progressives) à la surface
Q12 de la piscine. Faire l'application numérique pour $L = 12$ m et $c = 4{,}0$ m.s^{-1}.

   (b) Les jets doivent-ils être injectés au même instant par les deux injecteurs ? Si non, quel doit-être le retard
Q13 temporel Δt ?

3. L'injecteur 2 est déréglé, sa fréquence f_2 diffère légèrement de f_1, celle du premier injecteur. On note $\Delta f = |f_2 - f_1|$.
Q14 Quel phénomène va-t-on observer ? Quelle en sera la période ?

4. Combien d'injecteurs faudrait-il, où devrait-on les placer et comment devrait-on régler les jets pour obtenir
Q15 le mode de vibration correspondant à un noeud de plus dans la même piscine ?

LA PISCINE À VAGUES

3 Utilisation d'une plaque oscillante

1. Exploitation de la relation $c^2 = gH + \frac{4\pi^2 HA}{\rho\lambda^2}$.

   (a) ρ est une masse volumique, ainsi $\boxed{[\rho] = \dfrac{[m]}{[V]} = \mathrm{M.L^{-3}}}$. Il y a eu trop de confusion entre unité et dimension pour les longueurs : bonne dimension pour ρ mais ensuite lorsque l'on rencontre une distance, il faut bien mettre L et non M (probablement en pensant à mètre j'imagine). Si vous voulez utiliser les unités vous pouvez (bien que je recommande de ne pas le faire), mais il faut être cohérent et le faire partout sinon vous risquez de mélanger Masse et Mètre. D'après la relation précédente,

$$[c]^2 = \frac{[4\pi^2][H][A]}{[\rho][\lambda]^2} \Rightarrow \mathrm{L}^2.\mathrm{T}^{-2} = \frac{\mathrm{L}.[A]}{\mathrm{M}.\mathrm{L}^{-3}.\mathrm{L}^2} \Rightarrow \boxed{[A] = \mathrm{M}.\mathrm{T}^{-2}}$$

La dimension de la différence de deux grandeurs homogènes n'est pas sans dimension. On pouvait utiliser $[c]^2$ ou $[gH]$ mais il est inutile de faire les deux.

(b) En posant $A = 0$, on a simplement $c^2 = gH \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{gH}}$.

Q16 Application numérique : $\boxed{H = \frac{c^2}{g} = \frac{4^2}{9{,}8} \simeq 1{,}6 \text{ m}}$

Est-ce raisonnable de perdre des points sur cette question ?

2. Onde incidente $z_i(x,t)$:

(a) Pour une onde progressive dans le sens des x croissants,

$$z_i(x,t) = z_i\left(-L, t - \frac{x}{c}\right) = Z_m \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right] = Z_m \cos\left[\omega\left(t - \frac{x+L}{c}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{z_i(x,t) = Z_m \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(x+L)\right)}$$

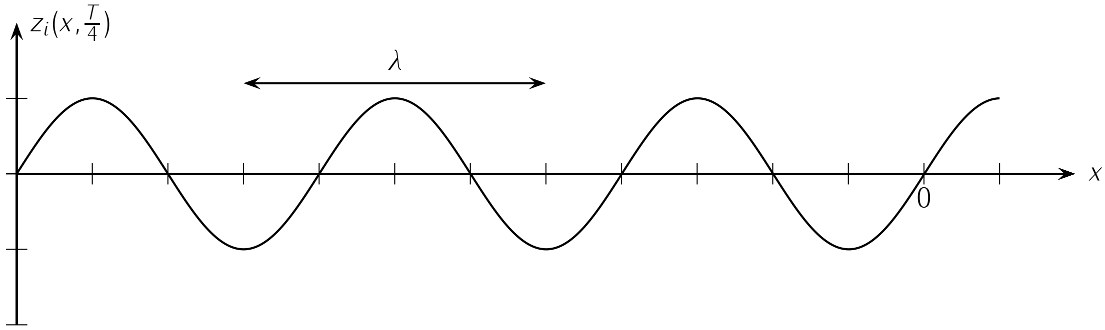
On choisit la phase de façon à ce que l'expression corresponde en $x = -L$.

Justifiez l'expression de $z_i(x,t)$.

(b) On en déduit, à $t = \frac{T}{4}$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

$$z_i\left(x, \frac{T}{4}\right) = Z_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}.\frac{T}{4} - \frac{\omega}{c}(x+L)\right) = Z_m \cos(\frac{\pi}{2} - k(x+L))$$

$$\Rightarrow \boxed{z_i\left(x, \frac{T}{4}\right) = Z_m \sin(k(x+L)) = Z_m \sin\frac{2\pi(x+L)}{\lambda}}$$



Simplifiez l'expression : $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$. Vous tracez $z_i(x)$ à $t = \frac{\pi}{4}$ donc la période est une période spatiale, λ.

3. Onde réfléchie $z_r(x,t)$:

(a) Le déphasage entre $z_i(0,t)$ et $z_r(0,t)$ doit être $\boxed{\text{nul modulo } 2\pi}$ pour qu'il y ait interférence constructive
Q17 des deux ondes en $x = 0$.

(b) $z_r(0,t)$ a la même amplitude, la même pulsation et la même phase à l'origine que $z_i(0,t)$, on a donc $z_r(0,t) = z_i(0,t) = Z_m \cos(\omega t - \frac{\omega \times (0+L)}{c}) \Rightarrow \boxed{z_r(0,t) = Z_m \cos(\omega t - kL)}$.
Comme il s'agit d'une onde progressive dans le sens des x décroissants, on a

$$z_r(x,t) = z_r(0, t + \frac{x}{c}) = Z_m \cos\left[\omega\left(t + \frac{x-L}{c}\right)\right] \Rightarrow \boxed{z_r(x,t) = Z_m \cos\left(\omega t + \omega\frac{x-L}{c}\right)}$$

Répondez en fonction des paramètres de l'énoncé, en particulier k n'était pas défini.

4. Onde stationnaire $z(x,t) = z_i(x,t) + z_r(x,t)$:
(a) On calcule $z(x,t) = Z_m \cos(\omega t - k(x+L)) + Z_m \cos(\omega t + k(x-L))$

$$\Rightarrow z(x,t) = 2Z_m \cos\left(\frac{\omega t - kx - kL + \omega t + kx - kL}{2}\right).\cos\left(\frac{\omega t - kx - kL - (\omega t + kx - kL)}{2}\right)$$

$\Rightarrow \boxed{z(x,t) = 2Z_m \cos(\omega t - kL)\cos(kx) = f(x).g(t)}$ avec $\boxed{f(x) = 2Z_m \cos kx}$ et $\boxed{g(t) = \cos(\omega t - kL)}$

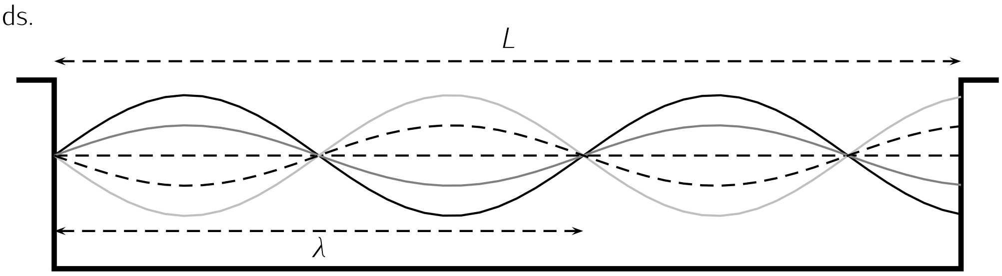
La constante pouvait être mise dans n'importe quelle fonction.

(b) Pour qu'il apparaisse un nœud de vibration en $x = -L$, il faut que $\forall t \quad z(x = -L, t) = 0$. Puisque $g(t)$ ne s'annule pas pour tout t, c'est que soit $Z_m = 0$ (auquel cas il n'y a pas d'onde), soit $f(x)$ s'annule en $x = -L$. Ce sera le cas si $\cos(-kL) = \cos(kL) = 0 \Rightarrow kL = \frac{\pi}{2} + n\pi$ avec n entier avec $kL = \frac{\omega L}{c} = \frac{2\pi L}{cT} = \frac{2\pi L}{\lambda}$

Q18 On en déduit la condition pour que des ondes puissent se propager : $\frac{2\pi L}{\lambda} = n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{L = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \text{ avec } n \text{ entier.}}$

Lisez bien l'énoncé, commencez par tracer la figure au brouillon.

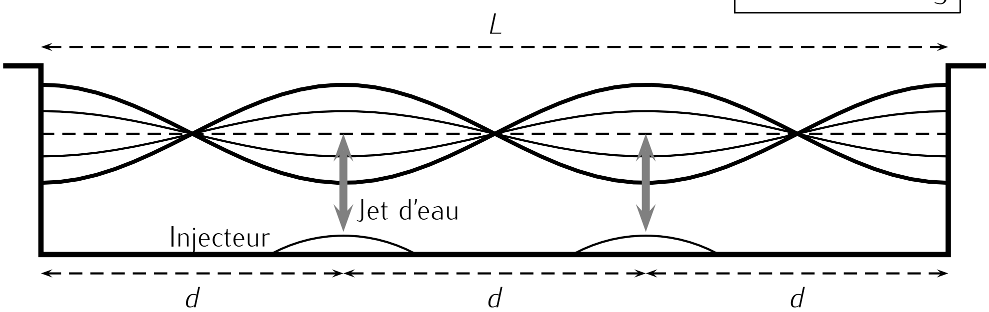
(c) On dessine la piscine et l'onde stationnaire dans le cas où il y a un ventre à droite et un nœud à gauche et 4 nœuds.



Q19 (d) Dans le mode précédent, $\boxed{L = 3\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{7}{4}cT = \frac{7}{4} \times 4{,}0 \times 1{,}0 = 7{,}0 \text{ m}}$

4 Utilisation d'injecteurs

Q20 1. Les injecteurs se situent sous les ventres, on remarque sur la figure, que $\boxed{L = 3d \Rightarrow d = \frac{L}{3}}$.



2. Réglage des jets :

   (a) Les jets doivent être synchrones avec les ondes progressives de longueur d'onde λ qui composent l'onde stationnaire. Dans ce mode de vibration on a

$$L = \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{3} \Rightarrow \frac{c}{f} = \frac{2}{3}L \Rightarrow \boxed{f = \frac{3c}{2L} = 0{,}50 \text{ Hz}}$$

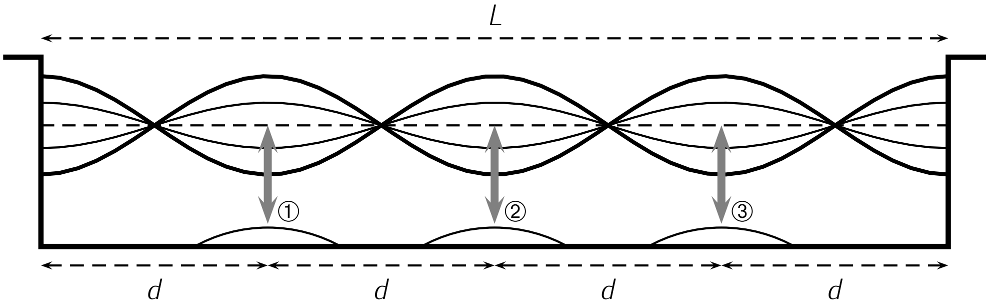
   (b) Les jets sont distants de $\frac{\lambda}{2}$, ils doivent donc être en opposition de phase (un jet monte pendant que

Q21 l'autre descend) ce qui correspond à une retard temporel $\boxed{\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2f} = 1 \text{ s}}$

3. Si les deux injecteurs ont des fréquences proches mais différentes, c'est à dire si $|f_2 - f_1| \ll f_1 \simeq f_2$, la superposition des deux ondes progressives asynchrones va donner naissance au phénomène des $\boxed{\text{battements}}$.

Q22 La période des battements est $\boxed{T_{\text{bat}} = \frac{1}{|f_2 - f_1|}}$.

4. Pour observer 4 noeuds au lieu de 3 dans la même piscine on peut utiliser le dispositif suivant :



Il faudrait $\boxed{\text{3 injecteurs}}$ placés à $d = \frac{\lambda}{4}$ les uns des autres avec $L = 2\lambda$ soit $\boxed{d = \frac{L}{4} = 3{,}0 \text{ m}}$. La fréquence des jets devrait être f telle que $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{L}{2} \Rightarrow \boxed{f = \frac{2c}{L} = 0{,}67 \text{ Hz}}$ et enfin, les injecteurs ① et ③ devraient

Q23 être en phase, l'injecteur ② quant à lui devrait être en opposition de phase.

Il y a en fait d'autres possibilités.

Certain ont dit qu'il faut un retard d'une période. Cela correspond à pas de retard du tout puisque l'on considère des signaux périodiques.