Régime sinusoïdal forcé

Exercice 1 : Résonance en tension

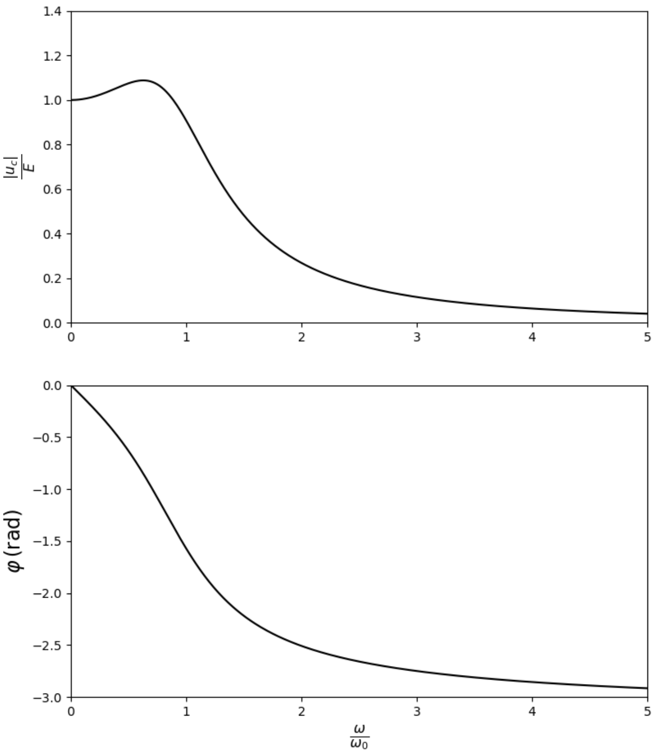
On considère un circuit RLC série alimenté par une tension $e(t) = E\cos(\omega t)$.

1. Établir l'expression de l'amplitude complexe, $\underline{U_c}$, de la tension aux bornes du condensation.
2. On écrit $\underline{U_c}$ sous la forme :

$$\underline{U_c} = \frac{E}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

   Exprimer ω_0 et Q en fonction de R, L et C.

3. Montrer qu'il y a résonance à une pulsation ω_r à condition que $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donner l'expression de ω_r en fonction de ω_0 et Q.
4. On représente ci-dessous l'allure de $|\underline{U_c}|$ et de $\varphi = \arg(\underline{U_c})$ en fonction de $\frac{\omega}{\omega_0}$.

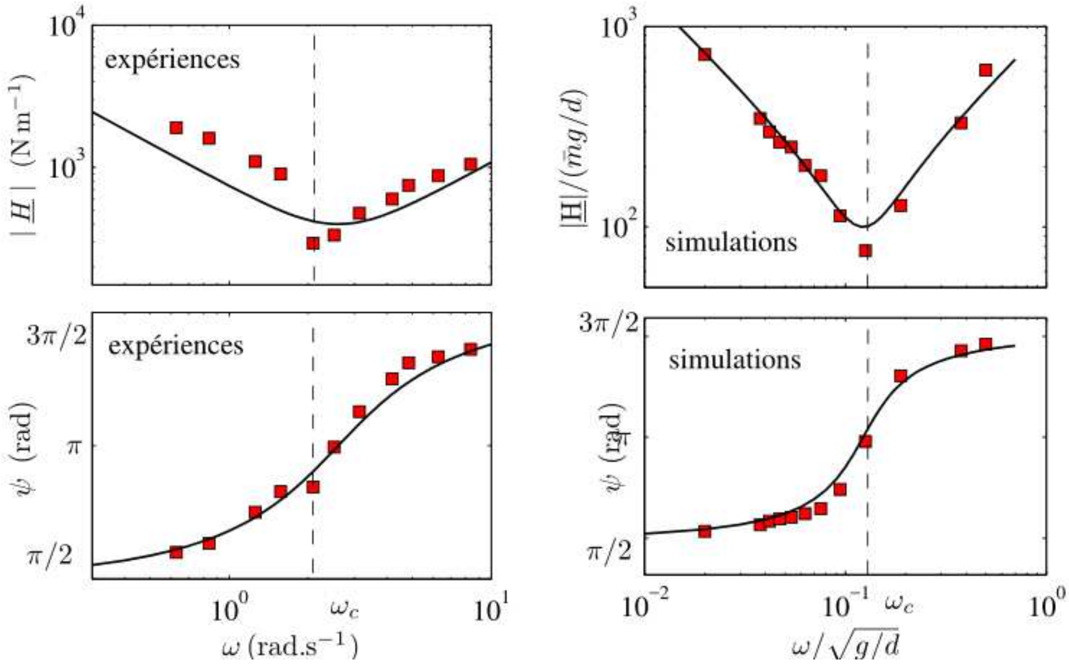


   Évaluer la valeur du facteur de qualité Q.

Exercice 2 : Bulldozer

On considère un bulldozer muni d'une lame inclinée raclant un lit de sable en avançant selon un axe horizontal à vitesse constante. On note y l'altitude de la lame et on impose à celle-ci un mouvement sinusoïdal : $y(t) = y_0\cos(\omega t)$. De plus, une jauge de contrainte mesure la composante verticale de la force exercée par le tas de sable sur la lame. On peut voir ci-dessous, un schéma de principe, une photo de l'expérience et un résultat de simulation numérique.

En régime permanent cette force est sinusoïdale est s'exprime sous la forme $f(t) = F\cos(\omega t + \psi)$. On représente ci-dessous l'allure de $H = \frac{F}{y_0}$ et de ψ en fonction de la pulsation ω (pour les expériences et les simulations).



1. Soit $\underline{H}$ l'amplitude complexe de la force h. Compte tenu de l'allure des courbes, quelle expression pour $\underline{H}$ convient :

   (a) $\underline{H} = a + b\,(j\omega)$

   (b) $\underline{H} = a + \frac{b}{j\omega} + \frac{c}{-\omega^2}$

   (c) $\underline{H} = a + \frac{b}{j\omega} + c\,(j\omega)$

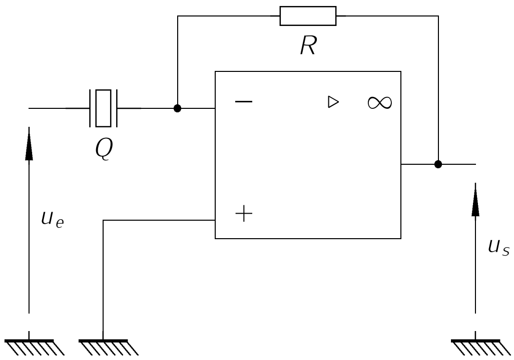
   (d) $\underline{H} = a + b\,(j\omega) + c\left(-\omega^2\right)$

2. De quels signes sont les coefficients a, b et c ?
3. Sachant que la masse de sable, M, poussée par le bulldozer est proportionnelle à $\int y dt$: $M = \alpha\int_0^t y(t')\mathrm{d}t'$, donner l'expression de h en fonction de y.

Exercice 3 : Quartz

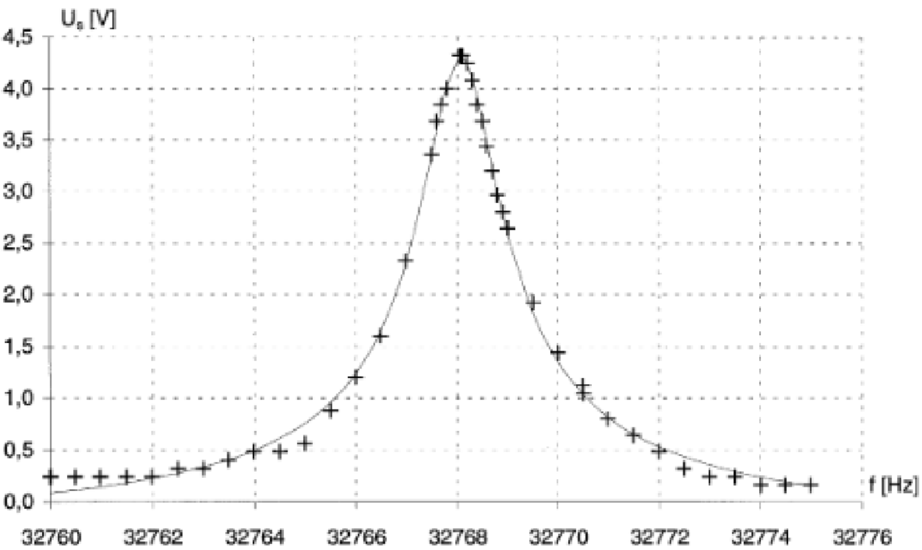
Le quartz est une forme particulière de cristal de silice. Il présente des propriétés physiques très intéressantes : la piézo-électricité. Quand on comprime un morceau de quartz dans une direction particulière, une tension apparaît aux bornes du cristal (c'est l'effet piézo-électrique).
Réciproquement, quand on applique une tension aux bornes d'un quartz, ce dernier se déforme proportionnellement à la tension appliquée (c'est l'effet piézo-électrique inverse). Ainsi, le quartz est très

intéressant pour l'électronique car on parvient à réaliser des circuits oscillants, à base de résonateur à quartz, très stables dans le temps.
Afin d'étudier un résonateur à quartz on peut utiliser le circuit ci-dessous :



Où $u_e = E\cos(\omega t)$. Ce circuit est appelé « convertisseur courant-tension », la tension u_s est proportionnelle à l'intensité du courant circulant à travers le quartz.
Au voisinage de sa fréquence de résonance, le quartz peut-être modélisé par un circuit RLC série doté d'un facteur de qualité très élevé.

1. Soit un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé. Établir l'expression de l'amplitude complexe du courant traversant le circuit.
2. Définir la bande passante à -3dB et montrer que sa largeur $\Delta\omega$ vérifie $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$
3. La figure ci-dessous donne l'allure de l'amplitude de la tension u_s en fonction de la fréquence f. Déduire des mesures, les valeurs de la pulsation de résonance du quartz et de son facteur de qualité.



Exercice 4 : Association RC et RL

1. Dipôles R, C série ou parallèles.
   On considère les deux groupements g_1 et g_2 constitués respectivement
   — par un condensateur de capacité C en parallèle avec un résistor de résistance R pour g_1
   — par un condensateur de capacité C' en série avec un résistor de résistance R' pour g_2.
   Ces groupements sont alimentés par un générateur de tension sinusoïdale de pulsation ω.
   (a) Déterminer C' et R' en fonction de R, C et ω pour que les deux groupements soient équivalents, c'est à dire qu'ils doivent avoir la même impédance quelle que soit la fréquence.
   (b) Pour quelle valeur de ω a-t-on $RC = R'C'$?
2. Dipôles R, L série ou parallèles.
   On considère les deux groupements g_1' et g_2' constitués respectivement
   — par une bobine d'inductance L en parallèle avec un résistor de résistance R pour g_1
   — par une bobine d'inductance L' en série avec un résistor de résistance R' pour g_2.
   Ces groupements sont alimentés par un générateur de tension sinusoïdale de pulsation ω.
   (a) Déterminer L' et R' en fonction de R, L et ω pour que les deux groupements soient équivalents.
   (b) Pour quelle valeur de ω a-t-on $\frac{R'}{R} = \frac{L'}{L}$?

1. a. $C' = C(1 + \frac{1}{u^2})$ et $R' = \frac{R}{1+u^2}$ avec $u = RC\omega$ 1. b. $\omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}$ 2. a. $R' = \frac{R}{1+\frac{1}{u^2}}$ et $L' = \frac{L}{1+u^2}$ avec $u = \frac{L\omega}{R}$ 2. b. $\omega_0 = \frac{R}{L}$

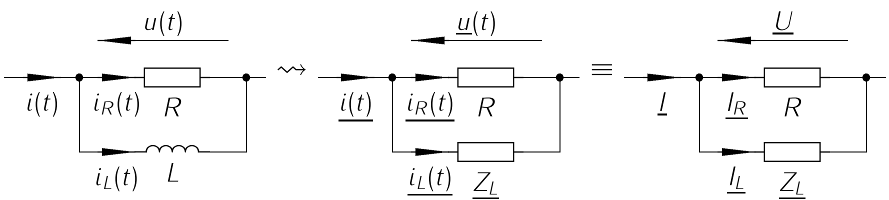
Exercice 5 : Association RL parallèle.

On place en parallèle une résistance $R = 40\ \Omega$ et une bobine d'inductance $L = 0{,}16$ H.
Entre leurs bornes communes, on applique la tension u du secteur (valeur efficace $U = 220$ V ; 50 Hz).

1. Calculer les valeurs efficaces I_R et I_L des courants traversant R et L ainsi que leur phase à l'origine φ_R et φ_L si on prend la phase à l'origine de u comme origine des phases.
2. Calculer, par deux méthodes, l'intensité efficace totale I et son déphasage φ par rapport à la tension.

L'association RL parallèles est soumise à la tension $u = \sqrt{2}U.\cos\omega t$ si on prend la phase à l'origine de $u(t)$ pour origine des phases.

1. On représente le circuit puis son équivalent en notations complexes en remplaçant les grandeurs sinusoïdales par leurs représentations complexes.
   On peut également représenter seulement les valeurs efficaces complexes (comme si on avait divisé les grandeurs précédentes par $\sqrt{2}.e^{j\omega t}$).



   On se retrouve alors avec un circuit sur lequel on peut directement appliquer des lois d'Ohm généralisées :
   Aux bornes de R : $\underline{U} = R.\underline{I}_R \Rightarrow I_R = |\underline{I_R}| = \frac{U}{R} \simeq 5{,}50$ A et $\varphi_R = \arg \underline{I_R} = \arg \underline{U} - \arg \underline{R} = 0$.
   Aux bornes de L : $\underline{U} = \underline{Z}_L.\underline{I}_L$ avec $\underline{Z}_L = jL\omega$ où $\omega = 2\pi f \Rightarrow I_L = |\underline{I_L}| = \frac{|\underline{U}|}{L\omega} = \frac{U}{2\pi Lf} \simeq 4{,}38$ A et $\varphi_L = \arg \underline{I_L} = \arg \underline{U} - \arg \underline{Z}_L = 0 - \arg \underline{Z}_L = -\frac{\pi}{2}$ ($i(t)$ en quadrature retard sur $u(t)$).

2. À tout instant, $i(t) = i_R(t) + i_L(t)$ soit, en notation complexe,

$$\underline{i(t)} = \underline{i_R(t)} + \underline{i_L(t)} \Rightarrow \underline{I} = \underline{I_R} + \underline{I_L} = \frac{\underline{U}}{R} + \frac{\underline{U}}{jL\omega} = \left[\frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega}\right]U$$

Remarque : on retrouve $\underline{I} = \underline{Y}_{\text{équ}}.\underline{U}$ avec $\underline{Y}_{\text{équ}} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L$.

On en déduit ensuite $I = |\underline{I}| = \left|\frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega}\right| \times |U| = |\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2\omega^2}}U \simeq 7{,}03$ A et $\varphi = \arg \underline{I} = \arg\left[\frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega}\right] + \arg U = \arg\left[\frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega}\right]$.
Comme $\Re(\underline{I}) > 0$ et $\Im(\underline{I}) < 0$, on a $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0$ d'où ici $\varphi = -\arctan\frac{R}{L\omega} \simeq -38{,}5$ °

Exercice 6 : Circuit RLC parallèle en RSF

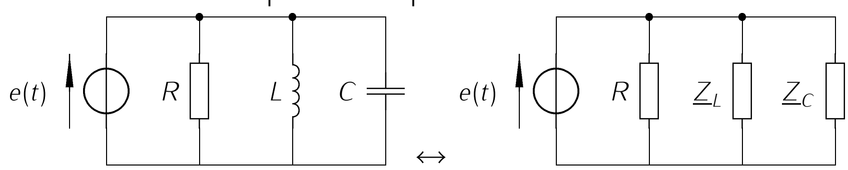
1. On considère un circuit parallèle RLC en régime alternatif sinusoïdal. Exprimer l'admittance complexe $\underline{Y}$ de ce circuit.
2. Mettre $\underline{Y}$ sous la "forme réduite" en l'exprimant uniquement en fonction de R, Q (facteur de qualité) et u (pulsation réduite) avec :

$$Q = RC\omega_0 = \frac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et}$$

$$u = \frac{\omega}{\omega_0} = \omega\sqrt{LC}$$

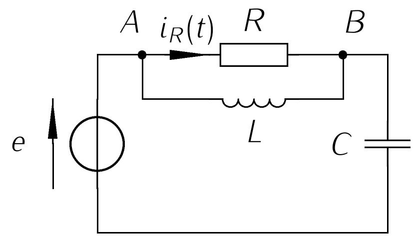
3. En déduire l'impédance complexe $\underline{Z}$ en fonction des mêmes variables réduites. Étudier les variations du module de $\underline{Z}$ en fonction de la fréquence. On montrera la présence d'un maximum que l'on précisera. Trouver les deux valeurs u_1 et u_2 pour lesquelles $|\underline{Z}| = \frac{R}{\sqrt{2}}$.
4. Monter que $|u_2 - u_1| = \frac{1}{Q}$. À la fréquence de résonance, quelle est l'impédance simple équivalente du circuit ?
5. Que se passe-t-il loin de la fréquence de résonance ?

1. On représente le circuit en régime sinusoïdal forcé puis son équivalent :
On peut directement utiliser la loi d'association des admittances en parallèle :
$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \underline{Y}_C + \underline{Y}_L$ soit ici
$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j(C\omega - \frac{1}{L\omega})$.



2. En introduisant $Q = RC\omega_0 = \frac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ et $u = \frac{\omega}{\omega_0} = \omega\sqrt{LC}$, on peut écrire
$\underline{Y} = \frac{1}{R}[1 + j(RC\omega - \frac{R}{L\omega})]$ avec $RC = \frac{Q}{\omega_0}$ et $\frac{R}{L} = Q\omega_0$ d'où $\underline{Y} = \frac{1}{R}[1 + j(Q\frac{\omega}{\omega_0} - Q\frac{\omega_0}{\omega})] = \frac{1}{R}[1 + jQ(u - \frac{1}{u})]$
3. On en déduit alors l'impédance complexe $\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{R}{1+jQ(u-\frac{1}{u})}$ et son module $|\underline{Z}| = \frac{R}{\sqrt{1+Q^2(u-\frac{1}{u})^2}}$
$|\underline{Z}|$ est maximale lorsque le dénominateur est minimum, c'est à dire pour $u = 1$, on a alors $|\underline{Z}| = R$.
$|\underline{Z}| = R/\sqrt{2}$ lorsque $1 + Q^2(u - \frac{1}{u})^2 = 2$ c'est à dire en $u_1 = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$ et $u_2 = \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$ (racines positives, Cf. cours).
4. On vérifie que $|u_2 - u_1| = |\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - (-\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}})| = \frac{1}{Q}$: la bande passante est moins large quand le facteur de qualité est élevé. À la fréquence de résonance $f = f_0 \iff u = 1$ le circuit est équivalent à un résistor de résistance R.
5. Pour $f \gg f_0$, $\underline{Z} \simeq \frac{1}{jC\omega}$ il est purement capacitif et pour $f \ll f_0$, $\underline{Z} \simeq jL\omega$, il est purement inductif.

Exercice 7 : Résolution d'un circuit en RSF



On considère le circuit représenté ci contre.
Il est alimenté par un générateur de tension sinusoïdal : $e(t) = E\sqrt{2}\cos\omega t$.

1. Déterminer $i_R(t)$, l'intensité du courant qui traverse R.
2. En déduire la pulsation pour que le courant dans R soit indépendant de R.
3. Quelle est alors la puissance moyenne fournie par le générateur de tension ?