**Conseils :**

- Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
- Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

---

**Consignes :**

- Toutes les expressions littérales demandées devront être encadrées à la **règle** ( pénalité **- 0,5 point**).
- Chaque expression littérale demandée et exprimée de manière non homogène entraînera la perte d'**un point**.
- Tous les résultats numériques demandés devront être soulignés et accompagnés de leurs unités (- **0,5 point**).
- L'aberration mathématique suivante vue à de trop nombreuses reprises ces derniers mois : $f(x = a) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=a} = 0$ entraînera la perte de **4 points** !
- L'absence de schéma illustrant les relations trouvées dans les calculs entrainera la **non correction** de l'exercice.
- Les feuilles doubles ou simples de votre copie devront être numérotées ( **-0,5 point**).
- La présentation de votre copie doit être soignée ( **-1 point**).

---

# Questions de cours

Répondez **très succintement** (une ou deux phrases maximum) aux questions de cours suivantes :

Q1 1. Comment se comporte une bobine en régime stationnaire ? un condensateur ?
Q2 2. Quel est, pour vous, l'intérêt du régime sinusoïdal forcé ?
Q3 3. Quelle relation lie l'amplitude et la valeur efficace d'un signal sinusoïdal ?
Q4 4. Donner l'expression du théorème de Parseval.
Q5 5. Définir et calculer l'impédance complexe d'une bobine réelle.
Q6 6. Donner l'expression du pont diviseur de tension en régime sinusoïdal forcé.
Q7 7. Qu'est-ce qu'un filtre électrique linéaire [1] ?
Q8 8. Définir la notion de fonction de tranfert.
Q9 9. Donner un exemple de filtre électrique passe-bas du premier ordre.

1. On demande ici la définition d'un filtre, toute réponse commençant par « c'est un filtre qui ... » est à bannir !

# Sonde adaptée pour oscilloscope

## 1 Impédance d'entrée de l'oscilloscope

L'impédance $\underline{Z}_1$ d'un oscilloscope est assimilable à l'association en parallèle d'une résistance $R_1 = 1{,}0$ MΩ et d'une capacité $C_1 = 20$ pF (Figures ci -dessous). On rappelle que 1 pF$= 10^{-12}$ F.

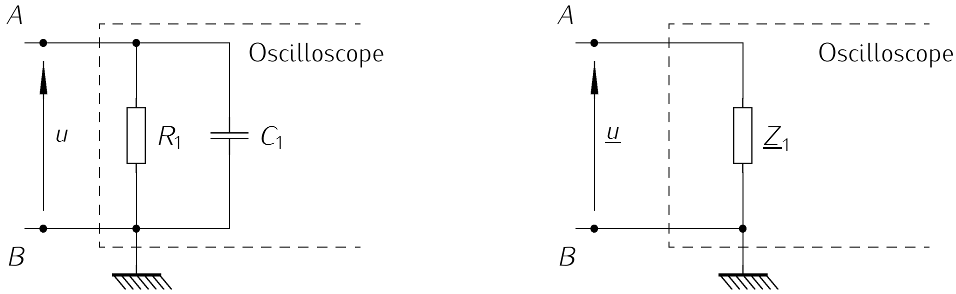



Figure 1 – Entrée de l'oscilloscope

$u(t)$ est une tension sinusoïdale de pulsation $\omega$.

Q10 1. Expliquer pourquoi lors du branchement d'un oscilloscope réel, le circuit est perturbé : c'est-à-dire que la tension $v_{\text{réelle}}$ présente dans le circuit en l'absence de l'oscilloscope est différente de $v_{\text{mesurée}}$ obtenue à l'oscilloscope lorsqu'on le branche.

Q11 2. Déterminer l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z}_1$ en fonction de $R_1$, $C_1$, $\omega$ et du nombre complexe $j$ tel que $j^2 = -1$.

Q12 3. Déterminer la valeur numérique $Z_1$ du module de cette impédance $\underline{Z}_1$ pour une fréquence $f = 1$ kHz puis pour $f = 100$ kHz.

Q13 4. Quelle est la valeur théorique de la résistance d'entrée $R_V$ d'un voltmètre idéal ? Quel est l'ordre de grandeur de $R_V$ pour un multimètre numérique réel ? Commenter les valeurs précédemment obtenues pour $Z_1$.

## 2 Branchement de la sonde $[Q]$

On branche alors le quadripôle passif $[Q]$ comme indiqué sur les figures ci-dessous.

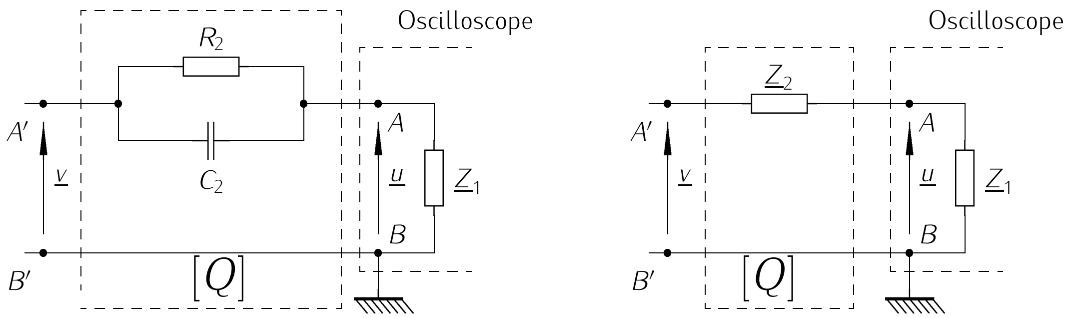



Figure 2 – Entrée de l'oscilloscope équipé d'une sonde

Il comporte lui aussi un résistor en parallèle avec un condensateur. La résistance du résistor est $R_2$, la capacité du condensateur est $C_2$. On note $\underline{Z}_2$ son impédance équivalente.

Q14 1. On alimente le système avec une source idéale de tension sinusoïdale $v(t) = V_0 \cos \omega t$ de pulsation $\omega$ fixée. Exprimer $\underline{u}$ en fonction de $\underline{v}$ et des impédances $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$.

Q15 2. En déduire l'expression du rapport $\frac{\underline{u}}{\underline{v}}$ en fonction des résistances, capacités et de la pulsation.

Q16 3. Montrer que si $R_1C_1 = R_2C_2$, on a

$$\frac{\underline{u}}{\underline{v}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

indépendant de la valeur de $\omega$.

Q17 4. Calculer les valeurs numériques de $R_2$ et $C_2$ pour qu'on obtienne $\frac{\underline{u}}{\underline{v}} = \frac{1}{10}$.

Q18 5. Montrer que l'impédance d'entrée vue entre les bornes $A'$ et $B'$ est alors $\underline{Z}_e = 10\underline{Z}_1$. Calculer son module pour $f = 1$ kHz puis $f = 100$ kHz. Commenter.

## C. Réglage de $[Q]$

Ce quadripôle $[Q]$ représente une sonde de mesure que l'on intercale entre le dipôle où on prélève la tension et l'entrée de l'oscilloscope. $R_2$ et $C_2$ (ajustable) sont fixées aux valeurs calculées au B. 4.

Q19 1. Quel est l'intérêt de cette sonde ?

Q20 2. On applique la tension $v_t = V_0 \cos \omega t$ de fréquence $f$ entre $A'$ et $B'$ avec $V_0 = 5\,\mathrm{V}$. Représenter le spectre de la tension $v(t)$ et celui de la tension $u(t)$ pour $f = 1$ kHz, $f = 10$ kHz et $f = 100$ kHz.

Q21 3. On applique maintenant une tension $v(t)$ carrée de fréquence quelques kHz, de valeur moyenne nulle. On rappelle que le spectre en amplitude d'un signal carré ne comporte que des harmoniques impaires, décroissantes en $1/n$. Représenter l'allure du spectre de $v(t)$ et celui de $u(t)$. Quelle est la forme de $u(t)$ ?

Q22 4. La sonde est déréglée et $G = \frac{u}{v}$ dépend de la fréquence mais on peut ajuster $C_2$. Proposer une méthode de réglage de la sonde sachant que l'on applique une tension $v(t)$ carrée de fréquence quelques kHz.

# Fréquences propres d'un tuyau sonore

La colonne d'air contenue dans un instrument à vent (flûte, clarinette...) ou dans un tuyau d'orgue vibre selon des modes propres correspondant à des conditions aux limites données. La grandeur vibratoire considérée est la surpression acoustique, notée $P(x,t)$.

Dans une modélisation très simple, on envisage deux types de conditions aux limites :
— si l'extrémité du tuyau est ouverte (c'est-à-dire en contact avec l'atmosphère), la surpression acoustique, $P(x,t)$, est nulle à cette extrémité ;
— si l'extrémité du tuyau est fermée, l'amplitude de la surpression acoustique $P(x,t)$ est maximale à cette extrémité.

## A. Par le calcul

On considère un tuyau de longueur $L$ dans lequel la célérité des ondes sonores est $v$. Le tuyau est ouvert à ses deux extrémités ($x = 0$ et $x = L$).
Il existe dans ce tuyau des ondes progressives selon les $x$ croissants et décroissants.

Q23 1. Écrire la forme générale d'une onde progressive selon les $x$ croissants. Comment cette expression se modifie-t-elle dans le cas d'une onde monochromatique (aussi appelée sinusoïdale) ?

Q24 2. On considère une onde monochromatique $P_+(x,t)$ selon les $x$ croissants de phase nulle en $(x,t) = (0,0)$ et une onde monochromatique $P_-(x,t)$ selon les $x$ décroissants de phase à l'origine a priori quelconque. En utilisant la condition en $x = 0$, montrer que les deux ondes sont de même amplitude et déterminez la phase à l'origine de la deuxième onde.

Q25 3. Exprimer l'onde totale, résultant de la superposition des deux ondes. Montrer qu'il s'agit d'une onde stationnaire.

Q26 4. En utilisant la condition aux limites en $x = L$, montrer que les longueurs d'ondes possibles dans cette cavité sont quantifiées.

## B. Avec des schémas

On considère toujours un tuyau ouvert à ses deux extrémités.

Q27 1. On considère une onde sinusoïdale vérifiant les conditions aux limites et de longueur d'onde « la plus grande possible ». Représenter *qualitativement* le profil de la surpression $P(x,t)$ en fonction de $x$ à différents instants.

Q28 2. Représenter de même les 3 modes propres suivants (un seul instant suffit).

Q29 3. Déduire des schémas, en expliquant votre raisonnement, la condition de quantification pour la longueur d'onde. Comparer avec le résultat obtenu dans la partie précédente.

Q30 4. Reprendre les trois questions précédentes dans le cas où le tuyau est ouvert à une extrémité et fermé à l'autre. L'affirmation suivante est-elle vraie « un tuyau ouvert aux deux extrémités sonne avec une fréquence double de celle d'un tuyau de même longueur fermé à une extrémité » ?

## C. Applications

1. Première application : les grandes orgues peuvent produire des notes très graves.

Q31 (a) Calculer la longueur d'onde d'un son de fréquence 34 Hz, correspondant au $\mathrm{Do}_0$ , en prenant la valeur de la célérité du son à 0°C dans l'air, soit $v = 331$ m/s.

Q32 (b) Calculer la longueur *minimale* d'un tuyau produisant cette note (et donner les conditions aux limites que vous avez considérées).

2. Deuxième application : on peut modéliser très grossièrement une clarinette par un tube fermé au niveau de l'embouchure et ouvert à l'extrémité de l'instrument.

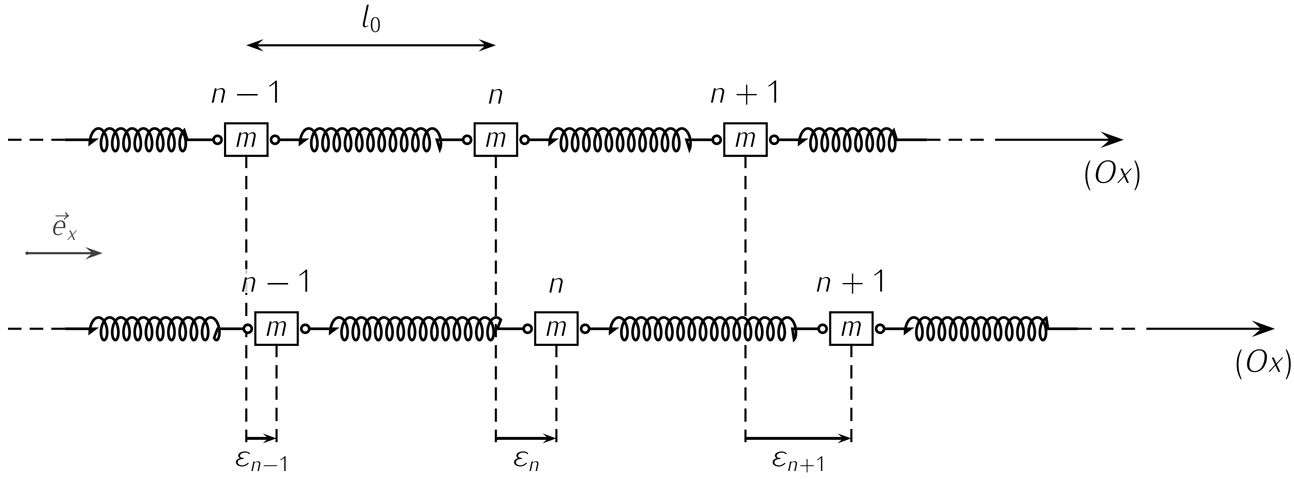
Q33 (a) Expliquer pourquoi le son produit par une clarinette ne comporte que des harmoniques impairs.

Q34 (b) L'instrument est muni d'une « clé de douzième » qui ouvre un trou situé à une distance $L/3$ de l'embouchure (c'est-à-dire le côté qui correspond à un ventre de pression). Lorsque ce trou est ouvert, la surpression est nulle en ce point. Quelles sont dans ce cas les longueurs d'ondes des modes propres du tuyau ? Quel est l'effet de l'ouverture du trou sur la fréquence du son émis par l'instrument ?

# Propagation du son dans un solide

On cherche à étudier la propagation du son dans un solide. Pour cela, on modélise à l'échelle microscopique un solide par une chaîne infinie d'oscillateurs de type masse-ressort. Les points matériels représentent les atomes du solide, et les ressorts permettent de rendre compte des forces subies par ces atomes lorsqu'ils se déplacent au voisinage de leur position d'équilibre. Le poids des atomes ainsi que les forces de frottement sont **négligées**. Tous les points matériels ont la même masse, notée $m$. Tous les ressorts ont la même raideur $k$ et la même longueur à vide $l_0$.

En l'absence de son, les ressorts ont pour longueur $l_0$. Tous les points matériels sont alors à l'équilibre, et sont tous espacés entre eux d'une longueur $l_0$. Le point matériel $n$ est alors à l'abscisse $x_n(t) = n\, l_0$ . En présence d'une onde sonore, chacun des points matériels se déplace au cours du temps sur l'axe $(Ox)$. Le point matériel $n$ est alors à l'abscisse $x_n(t) = nl_0 + \varepsilon_n(t)$ , avec $\varepsilon_n(t) \geq 0$ ou $\varepsilon_n(t) \leq 0$. L'onde sonore est caractérisée par la donnée de $\varepsilon_n(t)$ pour toutes les valeurs de $n$.




Q35 1. Exprimer $\overrightarrow{T}_{\text{gauche}}$ la force exercée sur le point $n$ par le ressort à sa gauche en fonction de $\varepsilon_n$, $\varepsilon_{n-1}$ et des constantes du problème.

Q36 2. Exprimer $\overrightarrow{T}_{\text{droite}}$ la force exercée sur le point $n$ par le ressort à sa droite en fonction de $\varepsilon_n$ et $\varepsilon_{n+1}$ et des constantes du problème.

Q37 3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au point matériel $n$ et montrer que l'équation du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon_n}{\mathrm{d}t^2} = \omega_0^2\,(\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n-1} - 2\varepsilon_n)$$

Déterminer $\omega_0$.

*Les questions ci-dessous, plus difficiles, ne sont à aborder que si tout le reste a été traité.*

Q38 4. Vérifier qu'une fonction du type $\varepsilon_n(t) = A\cos(\omega t - \alpha n l_0)$ (où $A$ et $\alpha$ sont des constantes) est solution de l'équation différentielle précédente, à condition que $\omega$, $\omega_0$, $\alpha$, et $l_0$ soient liés entre eux par une relation à déterminer.

Q39 5. On note $\varepsilon(x,t) = A\cos(\omega t - \alpha x)$, avec $x = nl_0$ la position à l'équilibre de l'atome $n$. $\varepsilon(x,t)$ représente une onde sonore progressive sinusoïdale se propageant dans le sens croissant. Exprimer sa célérité $c$.

Q40 6. On note $\varepsilon'(x,t) = A\cos(\omega t + \alpha x)$ l'expression d'une onde sonore progressive sinusoïdale de même fréquence se propageant dans le sens décroissant. Déterminer l'expression de l'onde sonore résultant de la somme de ces deux ondes et montrer qu'il s'agit d'une onde stationnaire.

# Sonde adaptée pour oscilloscope

## A. Impédance d'entrée de l'oscilloscope

En régime sinusoïdal forcé, on remplace le condensateur et le résistor par leur impédances complexes $R_1$ et $\underline{Z_{C1}} = \frac{1}{jC_1\omega}$.

Q1 1. Lors d'une mesure à l'oscilloscope, la mesure est généralement perturbée par l'instrument de mesure. En effet, si on se place aux bornes d'une résistance $R$, alors du point de vue du circuit, on a deux résistances en parallèles : $R$ et $R_1$, d'où une résistance équivalente $\frac{RR_1}{R+R_1}$. En particulier, si $R$ est de l'ordre de $R_1$, alors la résistance équivalente est deux fois plus faible ! Le circuit n'est donc pas le même en présence de l'oscilloscope. Cela peut avoir une influence sur la tension mesurée dans certains cas.

2. $\underline{Z}_1$ est l'association parallèle de $R_1$ et $\underline{Z}_{C1}$ d'où

Q2
$$\underline{Z_1} = \frac{R_1\underline{Z}_{C1}}{R_1 + \underline{Z}_{C1}} = \frac{R_1}{R_1.\underline{Y}_{C1} + 1} \Rightarrow \boxed{\underline{Z_1} = \frac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega}}$$

3. On en déduit le module
$$Z_1 = |\underline{Z}_1| = \frac{R_1}{\sqrt{1 + (R_1C\omega)^2}}$$
avec $\omega = 4\pi f$. L'application numérique donne :

Q3

| Fréquence $f$ (Hz) | $10^3$ | $10^5$ |
|---|---|---|
| Module $Z_1$ ($\Omega$) | $99.10^4$ | $79.10^3$ |

***Attention à l'unité du résultat. De même attention aux chiffres significatifs !***

4. Pour qu'un voltmètre soit idéal, il faudrait que sa $\boxed{\text{résistance d'entrée soit infinie}}$. Les voltmètres numériques réels ont en général une résistance d'entrée $R_V$ de l'ordre de $\boxed{1\ \text{M}\Omega \text{ à } 100\ \text{M}\Omega}$.
Les valeurs obtenues pour $Z_1$ sont donc $\boxed{\text{faibles}}$ par rapport à ce qu'on attend d'un oscilloscope
Q4 "idéal".

## B. Branchement de la sonde $[Q]$

1. Les impédances $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ sont traversées par le même courant, on a donc un pont diviseur de tension et
$$\boxed{\underline{u} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.\underline{v}}$$
Q5

2. La relation précédente s'écrit également

Q6
$$\frac{\underline{u}}{\underline{v}} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Y}_1\underline{Y}_2}{\underline{Z}_1\underline{Y}_1\underline{Y}_2 + \underline{Z}_2\underline{Y}_1\underline{Y}_2} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \Rightarrow \boxed{\frac{\underline{u}}{\underline{v}} = \frac{\frac{1}{R_2} + jC_2\omega}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j(C_1 + C_2)\omega}}$$

avec $\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1} + jC_1\omega$ et $\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega$.

3. Partons de

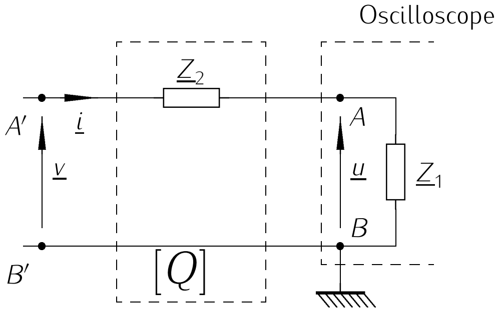
Q7

$$\frac{\underline{u}}{\underline{v}} = \frac{R_1}{R_1+R_2} = \frac{\frac{1}{R_2}+jC_2\omega}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+j(C_1+C_2)\omega} \Rightarrow \frac{R_1}{R_1}+\frac{R_1}{R_2}+jR_1(C_1+C_2)\omega = \frac{R_1+R_2}{R_2}+j(R_1+R_2)C_2\omega$$

$$\Rightarrow 1+\frac{R_1}{R_2}+jR_1C_1\omega+jR_1C_2\omega = \frac{R_1}{R_2}+1+jR_1C_2\omega+jR_2C_2\omega \qquad \Rightarrow \boxed{R_1C_1 = R_2C_2}$$

4. On cherche à avoir $\frac{R_1}{R_1+R_2} = \frac{1}{10} \Rightarrow 10R_1 = R_1+R_2 \Rightarrow \boxed{R_2 = 9R_1 = 9\ \text{M}\Omega}$ et $R_1C_1 = R_2C_2 \Rightarrow$
Q8 $C_2 = \frac{R_1C_1}{R_2} \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{C_1}{9} \simeq 2{,}2\ \text{pF}}$

5. Représentons l'impédance d'entrée de l'oscilloscope :




En notant $\underline{i}$ l'intensité du courant qui traverse l'oscilloscope,

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{v}}{\underline{i}} = \frac{\underline{v}}{\underline{u}} \times \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = 10 \times \underline{Z}_1 \Rightarrow \boxed{\underline{Z}_e = 10\underline{Z}_1}.$$

On en déduit immédiatement

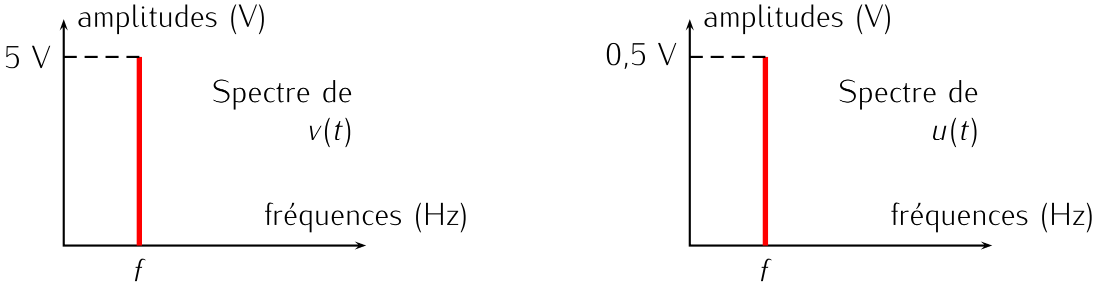
Q9

| Fréquence $f$ (Hz) | $10^3$ | $10^5$ |
|---|---|---|
| Module $Z_e = 10Z_1$ ($\Omega$) | $99.10^5$ | $79.10^4$ |

Ces valeurs, dix fois plus importante que sans la sonde, permettent de se $\boxed{\text{rapprocher du modèle de l'oscilloscope idéal, c'est à dire d'impédance d'entrée infinie.}}$

## C. Réglage de $[Q]$

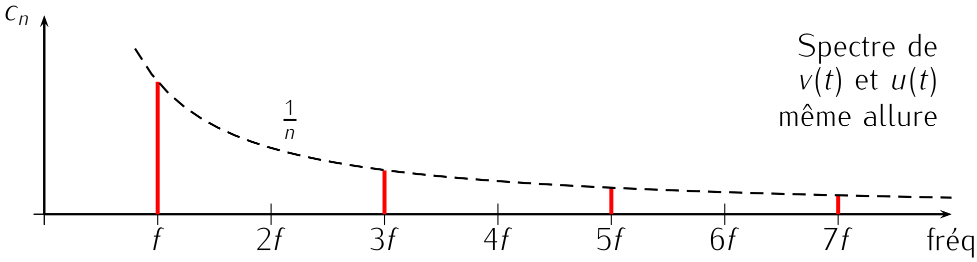
1. Comme indiqué plus haut, cette sonde a pour but d'$\boxed{\text{augmenter considérablement l'impédance d'entrée de l'oscilloscope}}$. Par contre la tension $u(t)$ doit avoir la même forme que $v(t)$, la tension à visualiser, $\boxed{\text{il ne doit donc pas y avoir de filtrage, cela déformerait la tension visualisée.}}$ C'est
Q10 pour cela qu'on s'arrange pour avoir $\frac{\underline{u}}{\underline{v}}$ indépendant de la fréquence.
2. Si $v(t)$ est sinusoïdale, son spectre ne comporte qu'un pic, de hauteur $V_m = 5$ V et à la fréquence $f$. Et si on est toujours dans le cadre de $\frac{u}{v} = \frac{1}{10}$ alors $u(t)$ est elle aussi sinusoïdale, de fréquence $f$ mais d'amplitude $U_m = 0{,}5$ V.



Q11 

On retrouve cette même allure pour $f = 1$ kHz, 10 kHz ou 100 kHz.

3. Allure des spectres de $v(t)$ et $u(t)$. Comme $G = \frac{v}{u} = \frac{1}{10}$ est indépendant de la fréquence, l'amplitude de chaque harmonique est $u(t)$ est égale à un dixième de celle de $v(t)$. On retrouve donc $\boxed{v(t) \text{ rectangulaire mais d'amplitude dix fois plus faible}}$.

Q12 


4. D'après ce qui précède, si et seulement si la sonde est correctement réglée, il n'y a a pas de filtrage, on a simplement $u = \frac{v}{10}$ de même forme que $v(t)$ créneau.
   On appliquera donc une tension rectangulaire et on modifie $C_2$ jusqu'à ce qu'on obtienne $u(t)$ de
   Q13 $\boxed{\text{même forme à l'écran}}$ de l'oscilloscope.

# Fréquences propres d'un tuyau sonore

1. De façon générale, une onde progressive selon les $x$ croissants (dans un milieu non dispersif et
   Q14 non absorbant) peut s'écrire $\boxed{s(x,t) = f(x - ct) = g(t - x/c)}$.
   Dans le cas d'une onde monochromatique, l'onde peut s'écrire sous la forme
   $\boxed{s(x,t) = s_0 \cos(\omega t - kx) = s_0 \cos(kx - \omega t)}$.
2. $s(x,t) = P_+(x,t) + P_+(x,t) = s_0 \cos(\omega t - kx) + s_0' \cos(\omega t + kx + \varphi)$
   En $x = 0$, la condition au limite impose $\forall t s(x,t) = 0 \Leftrightarrow s_0 \cos(\omega t) = -s_0' \cos(\omega t + \varphi)$. Puisque les deux expressions sont égales pour tout $t$, c'est que les deux fonctions sont égales (et pour cela
   Q15 le $\forall t$ est important !).

   ***Si vous ne mettez pas le $\forall t$, cela donne l'impression que vous pensez que***
   $2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \cos(0) \Rightarrow 2 = 1$ ***et*** $\frac{\pi}{3} = 0$ ***!***

   Les deux fonctions étant égales, les deux cosinus ont donc même amplitude, même phase à l'origine, même pulsation. Ce qui implique $\boxed{s_0 = -s_0' \text{ et } \varphi = 0}$

   ***Attention, certains d'entre vous on dit que la condition aux limites en 0 impliquait*** $P_+(x = 0,t) = 0$ ***et*** $P_-(x = 0,t) = 0$. ***C'est faux : c'est l'onde "totale" (somme des deux) qui doit s'annuler. C'est d'ailleurs ce point qui impose une réflexion lorsque l'onde incidente arrive sur un endroit où la corde est fixée.***
3. L'onde totale est la somme des deux ondes [2]

Q16
$$s(x,t) = s_0 \cos(\omega t - kx) - s_0 \cos(\omega t + kx) = -2s_0 \sin(\omega t) \sin(-kx)$$

2. à condition que les équations d'onde soient linéaires, ce qui est le cas de beaucoup d'onde dans des milieux simples. Toutefois, ce n'est pas toujours vrai : ce n'est par exemple a priori pas le cas pour des vagues dans la mer (équation non linéaire).

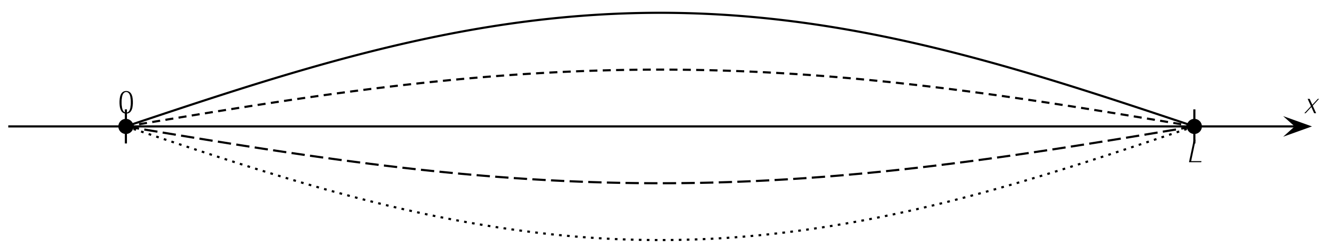
L'onde totale se met sous la forme $f(t) \times g(x)$ avec $f$ une fonction qui ne dépend que du temps et $g$ une fonction qui ne dépend que de l'espace. On a donc une onde stationnaire avec des nœuds (les points d'annulation de $g(x)$) et des ventres (les maxima de $|g(x)|$).

4. Il reste à prendre en compte la deuxième condition aux limites : $\forall t \quad s(L,t) = 0$ ce qui implique : $\forall t \quad 2s_0 \sin(kL) \sin(\omega t) = 0$. Le terme $\sin(\omega t)$ n'est pas nul pour tout $t$, c'est-à-dire il existe $t$ tel que ce terme est non nul. Toutefois, le produit est nul quelque soit $t$ (donc en particulier aussi pour les $t$ tels que $\sin(\omega t) \neq 0$). On a donc soit :
   (a) $s_0 = 0$, mais dans ce cas il n'y a ni signal ni onde,
   (b) soit $\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \quad ; \quad n \in N^*$ (car $k \neq 0$) $\Leftrightarrow \boxed{L = n\dfrac{\lambda}{2}}$ $n \in N^*$

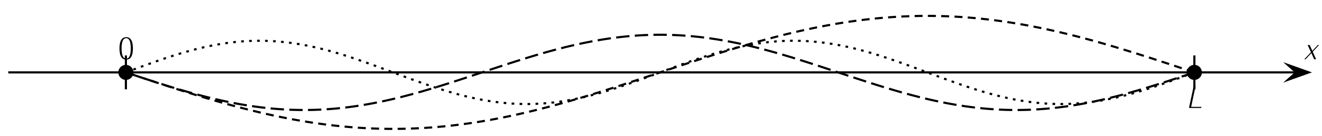
   Ces conditions impliquent donc que seules certaines ondes peuvent se propager (soit pas d'onde, soit $L = n\frac{\lambda}{2}$ , et leur longueur d'onde dépend d'un entier. On parle donc de quantification.

## A. Par les schémas

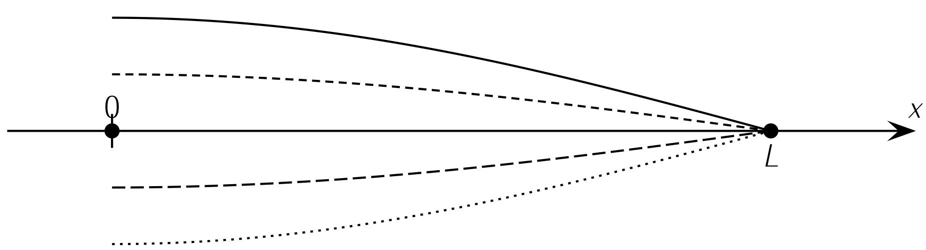
1. Dans le cas de la plus grande longueur d'onde possible, la longueur d'onde est plus grande que la longueur de la corde et on ne voit qu'un ventre.



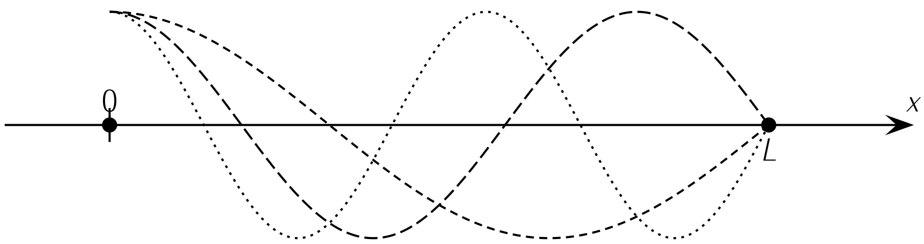

2. De même les 3 modes propres suivants :




3. Puisqu'il faut 2 nœuds aux extrémités, on remarque qu'il faut mettre un nombre entier de demi-longueur d'onde. On en déduit $L = n\frac{\lambda}{2}$, ce qui est bien le résultat de la partie précédente.
4. Puisque le tuyau est ouvert à une extrémité, alors il faut un ventre d'un côté et un nœud de l'autre.
   (a) Dans le cas de la plus grande longueur d'onde possible, la longueur d'onde est plus grande que la longueur de la corde et on ne voit qu'un ventre d'un coté et un nœud de l'autre, soit :

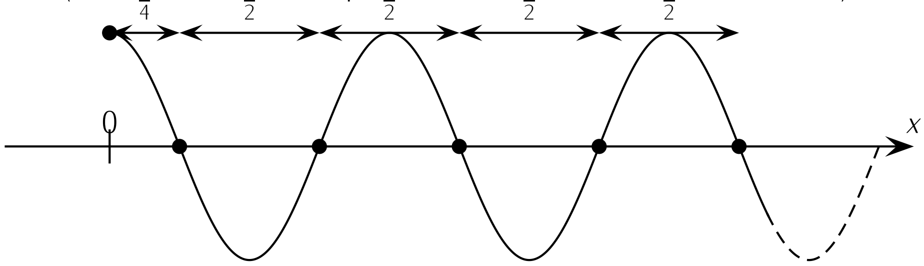



   (b) De même, les 3 modes propres suivants :




(c) Ici, c'est un peu plus délicat, mais le raisonnement peut être le suivant : il faut un ventre puis un nœud pour le premier mode, soit $L = \frac{\lambda}{4}$. Ensuite, pour chaque mode suivant, il faut que l'on ajoute $\lambda/2$ afin de "rajouter des nœuds" (ou des ventres) sans changer les conditions aux limites.

On peut le voir plus facilement en prenant un cosinus et en représentant les différents endroits pouvant convenir (en ne faisant varier qu'un bord, celui de "droite" ci-dessous).




On en déduit $\boxed{L = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}}$. On ne peut ici pas comparer au calcul qui n'a pas été fait, mais on pourrait faire les calculs et on trouverait le même résultat (cosinus maximum en valeur absolue au lieu de nul).

***Attention, une erreur classique est d'écrire $n\frac{\lambda}{4}$, toutefois cela ne fonctionne pas pour les $n$ pairs : par exemple en $n = 2$, on aurait un ventre aux deux bouts (ou un nœud au deux bouts).***

Pour répondre à l'affirmation, il faut exprimer les fréquences fondamentales dans les deux cas.

***Le son émis par l'instrument contient a priori tout les sinus à toutes les fréquences possibles. Toutefois le son résultant est un signal <u>non sinusoïdal</u> dont la fréquence est celle du <u>fondamental</u>.***

Cas ouvert/ouvert (fondamental $n = 1$) : $L = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f_{o/o}} \Rightarrow f_{o/o} = \frac{c}{2L}$

Cas fermé/ouvert (fondamental $n = 0$) : $L = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f_{f/o}} \Rightarrow f_{f/o} = \frac{c}{4L} = \frac{f_{o/o}}{2}$

L'affirmation « un tuyau ouvert aux deux extrémités sonne avec une fréquence double de celle d'un tuyau de même longueur fermé à une extrémité » est donc $\boxed{\text{vraie}}$.

***Il y a eu beaucoup d'erreur à cette question parce que vous avez voulu vérifier si on avait toutes les fréquences du 1er cas qui étaient deux fois plus grandes que les fréquences du 2e cas alors qu'il ne fallait regarder que le fondamental.***

## B. Applications

1. (a) $\lambda = c/f$ A.N. $\lambda = \frac{331}{34}$ $\boxed{\lambda = 9{,}7\,\text{m}}$

(b) Pour le fondamental, on a soit $L = \lambda/4$ soit $L = \lambda/2$ en fonction des conditions aux limites. Puisque l'on souhaite la longueur « minimale », il faut prendre $L = \lambda/4$ $\boxed{L = 2{,}4\,\mathrm{m}}$ (attention aux arrondis).

Les conditions aux limites sont donc ouvertes d'un coté et fermé de l'autre.

2. (a) Puisque l'onde se propage dans un milieu non dispersif et non absorbant : $f_n = \frac{c}{\lambda_n}$. Il reste à exprimer les différentes fréquences sachant que l'on connait la quantification sur les longueurs d'ondes :

$L = \frac{\lambda_n}{4} + n\frac{\lambda_n}{2} = \frac{\lambda_n}{4} \times (1 + 2n) \Rightarrow \lambda_n = \frac{4L}{1+2n}$

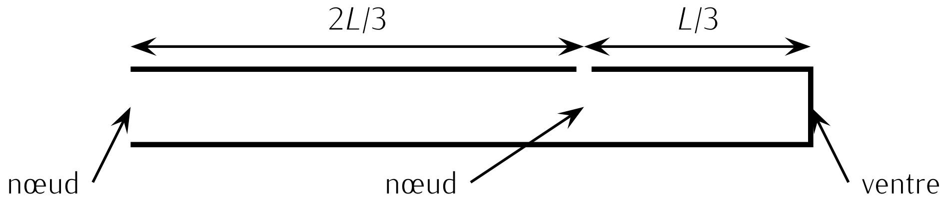
On en déduit $f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{4L}(1 + 2n)$.

On peut simplifier en exprimant les différentes fréquence en fonction de $f_0 = \frac{c}{4L}$ : $\boxed{f_n = f_0 \times (2n + 1)}$

On voit donc qu'il n'y a que des multiples impairs du fondamental.

***Vous avez été nombreux à vous arrêter à** $L = \frac{\lambda_n}{4} \times (1 + 2n)$ **puis** $2n + 1$ **est impair donc on a les harmoniques impairs. Le raisonnement est faux : il faut regarder les fréquences et non les longueurs pour pouvoir conclure.***

(b) Le schéma ci-dessous correspond à la situation décrite : ouvert d'un coté, fermé de l'autre et un petit trou ouvert à $L/3$ de l'extrémité fermée.




On doit toujours vérifier la condition $L = \frac{\lambda_n}{4} + n\frac{\lambda_n}{2}$, mais en plus, il faut vérifier les conditions $\frac{L}{3} = \frac{\lambda_n}{4} + m\frac{\lambda_n}{2}$ et $\frac{2L}{3} = \frac{\lambda_n}{2} + p\frac{\lambda_n}{2}$ avec $m$,$p$ des entiers.

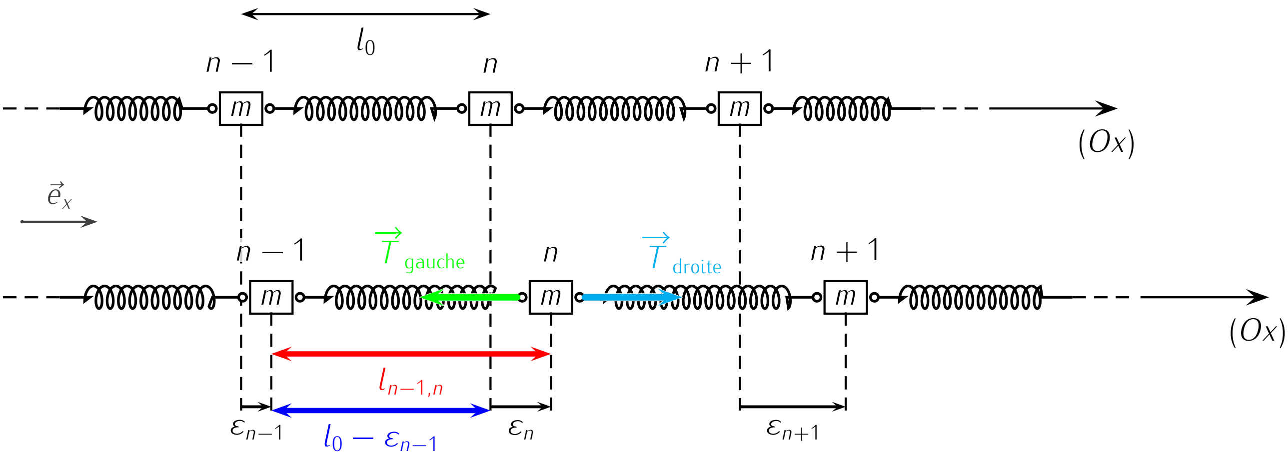
En effet, on se retrouve avec un tuyaux de longueur $L/3$ vérifiant des conditions asymétriques (fermé/ouvert) et un tuyau de longueur $2L$ vérifiant des conditions symétriques (ouvert/ouvert).

(Remarque : si l'on vérifie la deuxième condition, alors on vérifie nécessairement la première et la troisième : il suffit de multiplier l'équation 2 par 3 ou par 2 et on se rend compte que $n = 3m + 1$ et $p = 2m$).

On en déduit $\boxed{\lambda_n = \frac{c}{f_n} = \frac{4L}{3(2n+1)}}$ ce qui implique $f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{3c}{4L}(1 + 2n) = f_0' \times (2n + 1)$. La fréquence fondamentale est désormais $f_0' = \frac{3c}{4L}$.

Ainsi, avec la clé de douzième, la fréquence de chaque harmonique et en particulier du fondamental est multipliée par 3, $\boxed{\text{le son est plus aigu}}$.

# PROPAGATION DU SON DANS UN SOLIDE




Système : {le point $n$ de masse $m$}
Référentiel : terrestre, considéré comme galiléen pour cette étude
Bilan des forces appliquées : $\vec{T}_{\text{gauche}}$ et $\vec{T}_{\text{droite}}$ tels que définis par l'énoncé.
Schéma : voir plus haut. Le sens des forces pour les ressorts a été mis en faisant l'hypothèse que le ressort est étiré (permet de vérifier les signes, qui restent les mêmes si le ressort est comprimé).

Q17 1. On remarque sur le schéma que la longueur du ressort entre $n-1$ et $n$, ici noté $l_{n-1,n}$ est telle que $l_{n-1,n} + \varepsilon_{n-1} = l_0 + \varepsilon_n$ et donc $l_{n-1,n} = l_0 - \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$ . On en déduit :
$\vec{T}_{\text{gauche}} = -k(l_{n-1,n} - l_0)\vec{e}_x = -k(l_0 - \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n - l_0)\vec{e}_x = \boxed{-k(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})\vec{e}_x}$
Autre justification possible, l'énoncé donné à l'équilibre $x_n = nl_0$, donc hors équilibre $x_n = nl_0 + \varepsilon_n$ d'où $l_{n-1,n} = x_n - x_{n-1} = nl_0 + \varepsilon_n - ((n-1)l_0 + \varepsilon_{n-1}) = l_0 + \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}$.

Q18 2. De même $l_{n,n+1} = l_0 - \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}$ d'où : $\vec{T}_{\text{droite}} = -k(l_{n,n+1} - l_0)(-\vec{e}_x) = +k(l_0 - \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} - l_0)\vec{e}_x = \boxed{+k(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)\vec{e}_x}$

Q19 3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique au point matériel $n$ : $m\vec{a} = \vec{T}_{\text{gauche}} + \vec{T}_{\text{droite}} \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon_n}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_x = -k(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})\vec{e}_x + k(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)\vec{e}_x$
Soit en projetant selon $\vec{e}_x$ :
$m\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon_n}{\mathrm{d}t^2} = k(\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n+1} - 2\varepsilon_n) \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon_n}{\mathrm{d}t^2} = \frac{k}{m}(\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n+1} - 2\varepsilon_n)}$ ce qui est bien la forme suggérée par l'énoncée avec ici $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$.

***Le résultat étant donné, il faut être particulièrement rigoureux sur les justifications à cette question et aux deux précédentes.***

4. Soit $\varepsilon_n(t) = A\cos(\omega t - \alpha n l_0)$, alors $\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon_n}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2\cos(\omega t - \alpha n l_0)$, on a alors
$\varepsilon_{n+1}(t) = A\cos(\omega t - \alpha(n+1)l_0)$ et $\varepsilon_{n-1}(t) = A\cos(\omega t - \alpha(n-1)l_0)$
Pour que ce type de solution marche, il faut et il suffit donc que
$\forall t; -A\omega^2\cos(\omega t - \alpha n l_0) = \omega_0^2(A\cos(\omega t - \alpha(n+1)l_0) + A\cos(\omega t - \alpha(n-1)l_0) - 2A\cos(\omega t - \alpha n l_0))$
$\Leftrightarrow \forall t \quad -\omega^2\cos(\omega t - \alpha n l_0) = \omega_0^2(\cos(\omega t - \alpha(n+1)l_0) + \cos(\omega t - \alpha(n-1)l_0) - 2\cos(\omega t - \alpha n l_0))$
On utilise une formule d'addition de cosinus (pour faire apparaitre $\cos(\omega t - \alpha n l_0)$ partout et pouvoir simplifier) :
$\cos(\omega t - \alpha(n+1)l_0) + \cos(\omega t - \alpha(n-1)l_0) = 2\cos(\omega t - \alpha n l_0)\cos(\alpha l_0)$
On en déduit que la fonction $\varepsilon_n$ de l'énoncé est solution si et seulement si :

$\forall t \qquad -\omega^2\cos(\omega t - \alpha n l_0) = \omega_0^2(2\cos(\omega t - \alpha n l_0)\cos(\alpha l_0) - 2\cos(\omega t - \alpha n l_0))$

on met tout dans le même membre et on factorise par le cosinus

$\Leftrightarrow \forall t \qquad 0 = (2\omega_0^2\cos(\alpha l_0) - 2\omega_0^2 + \omega^2)\cos(\omega t - \alpha n l_0)$

Q20 comme cela doit être vrai pour tout $t$ et que le cosinus n'est pas nul pour tout $t$, alors c'est que $\boxed{2\omega_0^2\cos(\alpha l_0) - 2\omega_0^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\omega_0\sqrt{1-\cos(\alpha l_0)} = \omega}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction proposée par l'énoncé soit solution de l'équation.

Q21 5. $\alpha$ est ici le vecteur d'onde, or on sait d'après le cours que $\omega = \alpha c$ d'où $\boxed{c = \omega/\alpha}$

Q22 6. L'onde totale résultante est donc $\varepsilon_{tot} = \varepsilon + \varepsilon' = A(\cos(\omega t - \alpha x) + \cos(\omega t + \alpha x)) = \boxed{2A\cos(\omega t)\cos(\alpha x)}$.
L'onde est de la forme $g(t) \times f(x)$ et correspond donc à une onde stationnaire.