Suites, polynômes, matrices
DS5 - corrigé

Exercice 1 : Proche TD, pour s'échauffer

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminez l'inversibilité de A et son inverse si il existe.
2. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^4 - X^2 + 1$.
3. Déterminez les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{2n^3 + n - 1}{n^3 - 2n + 2} \qquad v_n = n^3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(n!) \qquad w_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$$

---

1. Avec miroir ou avec système (ce qui se prêtait bien ici vu la dernière ligne) on trouve

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

2. Avec $Y = X^2$ on étudie déjà $Y^2 - Y + 1$ qui a deux racines : $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Ainsi,
$$X^4 - X^2 + 1 = (X^2 - e^{i\frac{\pi}{3}})(X^2 + e^{i\frac{\pi}{3}})$$
On résout maintenant $z^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$
Les deux solutions sont évidentes :$z = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $z = -e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{-5\pi}{6}}$
De même les solutions de $z^2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ sont évidentes : $z = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ou $z = -e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$
D'où la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:
$$X^4 - X^2 + 1 = (X - e^{i\frac{\pi}{6}})(X + e^{i\frac{\pi}{6}})(X - e^{-i\frac{\pi}{6}})(X + e^{-i\frac{\pi}{6}})$$
En regroupant les racines conjuguées, on obtient la factorisation dans $\mathbb{R}$:
$$X^4 - X^2 + 1 = (X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$$

3. — pour u_n : On factorise par $2n^3$ au numérateur et par n^3 au dénominateur. Il vient immédiatement $\boxed{\lim u_n = 2.}$
   — pour v_n : Comme $|\cos(n!)| \leq 1$, on a $|v_n| \leq n^3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{n^3}{2^n}$
   Par croissance comparée, $\lim \dfrac{n^3}{2^n})0$ et par encadrement, $\lim |v_n| = 0$.
   Ainsi $\boxed{\lim v_n = 0}$
   — pour w_n : On peut procéder par encadrement, ou par suites extraites :
   $\forall n \in \mathbb{N}, w_{2n} = \dfrac{2}{2n}$, donc $\lim w_{2n} = 0$ et $w_{2n+1} = 0$, donc $\lim w_{2n+1} = 0$.
   Ainsi, $\boxed{\lim w_n = 0}$.

Exercice 2 :

Déterminez tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$(P')^2 = 4P$$
.
(On précise que P' désigne le polynôme dérivée de P et que P'^2 signifie $P' \times P'$ et non pas la dérivée seconde ou une composition)
On pourra raisonner sur le degré de P.

Remarquons déjà que $P=0$ vérifie $P'^2=4P$.

Supposons P non nul et soit $n=deg(P)$. Alors $deg(P')=n-1$ (ou $-\infty$, mais cela entrainera $P=0$, donc exclu) et $deg(P'^2)=2(n-1)$

Ainsi, si $P'^2=4P$, alors $2n-2=n$, c'est à dire $n=2$.

On cherche donc P sous la forme $P(X)=aX^2+bX+c$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $a\neq 0$

Alors $P'^2=(2aX+b)^2=4a^2X^2+4abX+b^2$, et P vérifie l'équation si et seulement si

$$4a^2X^2+4abX+b^2=4aX^2+4bX+4c$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 &= 4a \\ 4ab=4b \\ b^2=4c \end{cases}$$
$$\underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} a=1, b\in\mathbb{R}, c=\frac{b^2}{4}$$

L'ensemble des polynômes répondant au problème est donc :

$$P=0 \text{ ou } \exists b\in\mathbb{R}, P=X^2+bX+\frac{b^2}{4}$$

Exercice 3 :

Soit $P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ un polynôme et M une matrice carrée.

On définit $P(M)$ par $P(M)=\sum_{k=0} a_kM^k$.

Par exemple si $P(x)=X^2-4$, alors $P(M)=M^2-4I$.
On admet que si P et Q sont deux polynômes, alors pour toute matrice M carrée, $P(M)Q(M)=(PQ)(M)$.

Soient (x_n) et (y_n) les suites définies par :

$$x_0=1,\ y_0=2 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1}= & -7x_n+5y_n \\ y_{n+1}= & -10x_n+8y_n \end{cases}$$

On pose $A=\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$ et $X_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

1. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n et A.
2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\quad X_n=A^nX_0$.
3. Déterminez a et b réels tels que $A^2+aA+bI_2=O_2$. En déduire un polynôme P unitaire tel que $P(A)=O_2$.
4. Factorisez $P(X)$ et précisez les racines de $P(X)$.
5. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, déterminez $R_n(X)$, le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$.
6. Justifiez que $A^n=R_n(A)$ et calculez A^n.
7. En déduire les expressions explicites de x_n et de y_n.

---

1. On observe que $X_{n+1}=AX_n$.
2. On le montre par récurrence :
   Pour $n=0$, on a $A^0=I_2$ et $X_0=I_2X_0$, donc on a bien $X_0=A^0X_0$.

   Soit $n\geq 0$. Supposons que $X_n=A^nX_0$.
   Alors $X_{n+1}=AX_n=A(A^nX_0)=A^{n+1}X_0$ (par associativité)
   donc la propriété est héréditaire.
   Conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a bien $X_n=A^nX_0$.
3. On observe que $A^2-A-6I2=O_2$, et on pose $P(X)=X^2-X-6$. On a bien $P(A)=O_2$.
4. Comme $x=-2$ et $x=3$ sont les racines évidente de P, on a $P=(X+2)(X-3)$
5. On a $X^n=P(X)Q(X)+R_n(X)$ où Q,R_n sont des polynômes et $deg(R_n)<2$ (puisque P est de degré 2).
   Ainsi, il existe a,$b\in\mathbb{R}$ tels que
   $$X^n=P(X)Q(X)+aX+b$$
   comme -2 et 3 sont racines de P, on a
   $$\begin{cases} (-2)^n &= P(-2)Q(-2)-2a+b=-2a+b \\ 3^n &= 3a+b \end{cases}$$
   L'opération $L_2\leftarrow 3L_1+2L_2$ donne $5b=3.(-2)^n+2.3^n$, c'est à dire
   $$b=\frac{3}{5}(-2)^n+\frac{2}{5}3^n$$

Puis $a = \frac{1}{-2}\left((-2)^n - \frac{1}{5}\left(3.(-2)^n + 2.3^n\right)\right)$
D'où

$$a = -\frac{1}{5}(-2)^n + \frac{1}{5}3^n$$

Ainsi $R_n(x) = \frac{1}{5}\left((-(-2)^n + 3^n)X + 3.(-2)^n + 2.3^n\right)$

6. Comme $x^n = P(x)Q(x) + R_n(x)$, on a $A^n = P(A)Q(A) + R_n(A)$.
   Or $P(A) = 0_3$, d'où $A^n = R_n(A)$
   Ainsi $A^n = \frac{1}{5}\left((-(-2)^n + 3^n)A + (3.(-2)^n + 2.3^n)I_3\right)$
   et

$$A^n = \begin{pmatrix} 2(-2)^n - 3^n & -(-2)^n + 3^n \\ 2(-2)^n - 2.3^n & -(-2)^n + 2.3^n \end{pmatrix}$$

7. Comme $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ on déduit que

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n \\ 2.3^n \end{pmatrix}$$

   Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 3^n \text{ et } y_n = 2.3^n}$

Exercice 4 : des suites pour déterminer des puissances de matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez qu'il existe des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

   On exprimera a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n et on précisera a_0, a_1, b_0 et b_1.
2. Soit (u_n) une suite définie par u_0 et u_1 deux réels, et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$

   Donnez l'expression du terme u_n de la suite en fonction de n, de u_0 et de u_1.
3. Montrez que les suites (a_n) et (b_n) de la question 1 sont en fait des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 du type de la question 2. En déduire l'expression explicite de A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

---

1. Voici la partie analyse (qui n'a pas besoin de figurer sur la copie).
   Comme $A^0 = I_3$, on va poser $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. A partir de l'expression de A, on pose $a_1 = 1$ et $b_1 = -1$. Supposons qu'on ait des suites (a_n) et (b_n) telles que A^n soit de la forme proposée. Alors $A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix} a_n - 2b_n & -a_n & -a_n \\ -a_n & a_n - 2b_n & -a_n \\ -a_n & -a_n & a_n - 2b_n \end{pmatrix}$. En posant $a_{n+1} = a_n - 2b_n$ et $b_{n+1} = -a_n$, on aura $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix}$
   Synthèse (suffisant sur la copie) : en posant les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\boxed{a_0 = 1, b_0 = 0, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n - 2b_n \text{et } b_{n+1} = -a_n}$$

   On vérifie par récurrence qu'elles conviennent :
   Initialisation pour $n = 0$, avec les conditions données sur a_0 et b_0, on a bien $A^0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & b_0 \\ b_0 & a_0 & b_0 \\ b_0 & b_0 & a_0 \end{pmatrix}$

   Héréditié Soit $n \geq 0$. Supposons que $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$.

   Alors $A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix} a_n - 2b_n & -a_n & -a_n \\ -a_n & a_n - 2b_n & -a_n \\ -a_n & -a_n & a_n - 2b_n \end{pmatrix}$

   D'après la définition des suites (a_n) et (b_n), on obtient donc $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix}$.

   Ce qui confirme bien l'hérédité.

2. Une telle suite a pour equation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$, qui admet deux racines $\lambda = (-1)$ et $\mu = 2$, d'où $u_n = A(-1)^n + B2^n$. De plus on a $\begin{cases} u_0 = A + B \\ u_1 = -A + 2B \end{cases}$ d'où $B = (u_0 + u_1)/3$ et $A = (2u_0 - u_1)/3$.

Au final, $\boxed{u_n = \frac{1}{3}((2u_0 - u_1)(-1)^n + (u_0 + u_1)2^n)}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+2} = a_{n+1} - 2b_{n+1}$ et $b_{n+1} = -a_n$, d'où $\boxed{a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n}$. De même $b_{n+2} = -a_{n+1} = -a_n + 2b_n$ d'où $\boxed{b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n.}$ Il reste à appliquer la formule obtenue en 2. avec les valeurs initiale déterminée, et on a :
$\boxed{a_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n) \qquad b_n = \frac{1}{3}(-2^n + (-1)^n)}$ et enfin

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{n+1} + (-1)^n & -2^n + (-1)^n & -2^n + (-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & 2^{n+1} + (-1)^n & -2^n + (-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & -2^n + (-1)^n & 2^{n+1} + (-1)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 5 : Autour de la série harmonique

Soit $(H_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. a) Montrez que la suite (H_n) est croissante.
   b) Exprimez $H_{2n} - H_n$ sous la forme d'une somme et justifiez que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$
   c) Montrez par l'absurde que (H_n) n'est pas majorée et en déduire $\lim H_n$.
2. Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. Montrez que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   Remarque : leur limite commune est appelée constante γ d'Euler.

1. a) On a $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, donc $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$, donc (H_n) est une suite croissante.
   b) Exprimons déjà $H_{2n} - H_n$:
   $$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$
   Or pour tout $k < 2n$, $\frac{1}{k} > \frac{1}{2n}$, donc
   $$H_{2n} - H_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$
   D'où l'inégalité demandée.
   c) Supposons (H_n) majorée. Comme elle est croissante, elle converge vers une limite ℓ.
   De même, $\lim H_{2n} = \ell$. En passant à la limite dans l'inégalité $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$, on obtient $0 \geq \frac{1}{2}$, ce qui est absurde.
   Ainsi, (H_n) n'est pas majorée et $\boxed{\lim H_n = +\infty}$

2. Comme $u_n - v_n = \frac{1}{n}$, on a déjà $\lim u_n - v_n = 0$.
De plus, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$
Ici, l'étude du signe est un peu difficile... Voici une façon de faire :
Posons pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln(x)$. Alors $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}$
d'où $f'(x) = \frac{(x+1)^2 - (x+1) - 1}{(x+1)^2 x} = \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2 x}$. Comme $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a f croissante.
De plus, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} + \ln(\frac{x}{x+1})$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \ln(\frac{x}{x+1}) = \ln(1) = 0$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Comme f est croissante, on en déduit que $\forall x > 0, f(x) < 0$, et donc $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est décroissante.

On procède de la même façon avec $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$ pour trouver que (v_n) est croissante.
On en déduit que les suites sont bien adjacentes.

Exercice 6 :

Pour tout $P \in \mathbb{C}_3[X]$, on définit l'application φ par :

$$\varphi(P(X)) = P(X+1) - P(X)$$

où $P(X+1)$ désigne la composition de $X+1$ par P (et non pas le produit)

1. (Exemple pour comprendre) Vérifiez que $\varphi(X) = 1$ et $\varphi(X^2) = 2X+1$.
2. Montrez que pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{C}_3[X]$.
3. Soit P tel que $\varphi(P) = 0$:
   a) Montrez que si P admet une racine $\alpha \in \mathbb{C}$, alors $\alpha+1$ est racine de P aussi.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha + n$ est racine aussi. Que dire finalement de P ?
   c) Conclure sur l'ensemble des polynômes vérifiant $\varphi(P) = 0$.
4. a) Soit maintenant $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
   On suppose que $\varphi(P) = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \delta X^3$. Exprimez α, β, γ et δ en fonction de a,b, c et d.
   b) En déduire qu'il existe $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

   c) Calculez A^4. En déduire $\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(P))))$.

1. C'est une vérification.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et $Q = \varphi(P)$. Par composition et somme de polynômes, Q est un polynôme. De plus, $P(X+1)$ est de degré $deg(P) \times 1$ et par somme, $deg(Q) \leq deg(P) \leq 3$, donc $\boxed{Q = \varphi(P) \in \mathbb{R}_3[X]}$.
3. a) Supposons $\varphi(P) = 0$. Alors $P(X+1) = P(X)$. Supposons α racine de P. Alors $P(\alpha+1) = P(\alpha) = 0$, donc $\boxed{\alpha + 1 \text{ est racine de } P}$
   b) Par récurrence : Si $n = 1$, c'est la question a).
   Soit $n \geq 1$ et supposons que $\alpha + n$ est racine. D'après a), on a vu que si un nombre est racine, alors ce nombre $+1$ est racine aussi. Ainsi, $\alpha + n + 1$ est racine. La propriété est héréditaire.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha+n$ racine de P, donc P admet une infinité de racines : c'est impossible sauf si P est le polynôme nul.
   c) Conclusion : P est nul ou n'a pas de racine, pas même complexes, donc

$$\boxed{P \text{ est nul ou } P \text{ est une constante non nulle.}}$$

   Les constantes vérifient effectivement $\phi(P) = 0$, ce qui répond donc à la question.
4. a) Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3$. On calcule $\varphi(P)$:

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= a + b(X+1) + c(X+1)^2 + d(X+1)^3 - (a + bX + cX^2 + dX^3) \\ &= b(X+1) + c(X^2+2X+1) + d(X^3+3X^2+3X+1) - bX - cX^2 - dX^3 \\ &= b + c + d + X(2c+3d) + X^2(3d) \end{aligned}$$

   Ainsi, si $\varphi(P) = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \delta X^3$, on a :

$$\begin{cases} \alpha &= b + c + d \\ \beta &= 2c + 3d \\ \gamma &= 3d \\ \delta &= 0 \end{cases}$$

   b) Ainsi, $\boxed{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}}$

   c) On trouve $A^4 = \mathcal{O}_4$, et le calcul précédent montre qu'en calculant $A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont les coefficients d'un polynome, on obtient les coefficients de $\varphi(P)$. Donc en répétant l'opération 4 fois, on aura les coefficients de $\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(P))))$. Or $A^4 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \mathcal{O}_4 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   Donc $\boxed{\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(P)))) = 0 \text{ (le polynome nul)}}$.