

# Corrigé du DS5

## Problème 1

### Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

**Q1.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k + \sum_{k=1}^n a_k B_{k-1} \quad (\text{décalage d'indice dans la dernière somme}) \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \quad (\text{car } b_0 = B_0) \end{aligned}$$

Donc :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n.$$

autre solution : en remarquant que  $\forall k \in \mathbb{N}, B_k = B_{k+1} - b_{k+1}$ ,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_k B_k - a_{k+1} (B_{k+1} - b_{k+1})) + a_n B_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_k B_k - a_{k+1} B_{k+1}) + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} b_{k+1} + a_n B_n \\ &\quad (\text{somme télescopique première somme et décalage d'indice 2e somme}) \\ &= a_0 B_0 - a_n B_n + \sum_{k=1}^n a_k b_k + a_n B_n \\ &= S_n \quad (\text{car } b_0 = B_0) \end{aligned}$$

**Q2.** On suppose que la suite  $(B_n)$  est bornée et que la suite  $(a_n)$  est décroissante de limite nulle.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a_0 - 0$$

en particulier :

$$\text{la série } \sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1}) \text{ converge.}$$

La suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, donc :  $(a_k - a_{k+1}) B_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0(a_k - a_{k+1})$ , et la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante donc  $(a_n - a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est positive, de plus la série  $\sum (a_k - a_{k+1})$  converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série  $\sum (a_k - a_{k+1}) B_k$  converge absolument, donc converge (série complexe).

De plus  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, donc  $a_n B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ; donc d'après la transformation d'Abel,

$$\text{la série } \sum_{n \geq 0} a_n b_n \text{ converge.}$$

**Q3.** Exemple.

Dans cette question,  $\theta$  est un réel différent de  $2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Donc  $e^{i\theta} \neq 1$ , et par somme d'une série géométrique de raison  $e^{i\theta} \neq 1$  :

$$\text{pour } n \text{ entier naturel non nul, } \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{n^\alpha}$  et  $b_n = e^{in\theta}$ . Donc,  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$$|B_n| = \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq \frac{2}{1 - e^{i\theta}}.$$

donc, la suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. On distingue 2 cas :

**1<sup>er</sup> cas** :  $\alpha > 0$

donc  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante de limite nulle. Donc d'après la question **Q2**,

la série  $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$  converge.

**2<sup>ième</sup> cas** :  $\alpha \leq 0$

la série  $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$  diverge grossièrement.

Conclusion

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 0.$$

## Deuxième partie : convergence uniforme de séries

On considère une suite de réels  $(a_n)$  et  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur une partie  $A$  de  $\mathbb{C}$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

On pose, pour tout  $z \in A$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $F_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$ .

On suppose que la suite  $(a_n)$  est décroissante de limite nulle et qu'il existe  $M \in \mathbb{R}^+$ , tel que pour tout  $z \in A$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|F_n(z)| \leq M$  (on dit que la suite  $(F_n)$  est uniformément bornée).

**Q4.** Pour tout  $z \in A$ ,  $|a_n F_n(z)| \leq a_n M$ , donc  $\|a_n F_n\|_{\infty, A} \leq a_n M$ . Or  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc d'après le théorème des gendarmes :  $\|a_n F_n\|_{\infty, A} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc :

la suite  $(a_n F_n)$  converge uniformément sur  $A$ .

La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n - a_{n+1} \geq 0$ , donc pour tout  $z \in A$ ,  $|(a_n - a_{n+1})F_n(z)| = (a_n - a_{n+1})|F_n(z)| \leq (a_n - a_{n+1})M$ . Donc :  $\|(a_n - a_{n+1})F_n\|_{\infty, A} \leq (a_n - a_{n+1})M$  or d'après la question **Q2**, la série  $\sum (a_n - a_{n+1})$  converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série  $\sum \|(a_n - a_{n+1})F_n\|_{\infty, A}$  converge, donc

la série de fonctions  $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})F_k$  converge normalement sur  $A$ .

**Q5.** On sait que  $(a_n F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $A$  et  $\sum (a_n - a_{n+1})F_n$  converge normalement, donc uniformément sur  $A$ ; et d'après la transformation d'Abel  $S_n = \sum (a_n - a_{n+1})F_n + a_n F_n$ , donc

la série de fonctions  $\sum a_n f_n$  converge uniformément sur  $A$ .

## Troisième partie : convergence uniforme d'une série entière

**Q6.** Si  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  est une série entière de la variable complexe de rayon  $R > 0$ , la série converge normalement, donc uniformément sur tout disque  $D_f(0, r)$  de centre 0 et de rayon  $r \in ]0; R[$ .

Dans la suite du problème, on considère la série entière de la variable complexe  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$  de rayon 1.

**Q7.** Supposons par l'absurde que la série entière  $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$  converge uniformément sur  $] -1; 1[$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , donc  $\frac{x^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ , donc d'après le théorème de la double limite,  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  converge et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Or  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  est une série de Riemann divergente, d'où la contradiction.

Donc :

la série de la variable réelle  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$  ne converge pas uniformément sur  $] -1, 1[$  ( en particulier la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$  ne converge pas uniformément sur  $D$ ).

Autre solution, utiliser le fait que  $x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{n}}$  est bornée sur  $] -1; 1[$  et  $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$  n'est pas bornée sur  $] -1; 1[$  (à justifier : plus long).

**Q8.** On pourra confondre un point de  $\mathbb{R}^2$  et son affixe.  
pour  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , on note  $D_\alpha$  l'ensemble des complexes  $z$ , tels que  $|z| \leq 1$  et dont la partie réelle vérifie  $\operatorname{Re}(z) \leq \cos \alpha$ .  
Représenter géométriquement l'ensemble  $D_\alpha$  dans un repère orthonormé du plan.  
*attention à ne pas confondre abscisse et ordonnée...*

**Q9.** L'application :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad (x, y) \longmapsto x$$

sont polynomiales donc continue sur  $\mathbb{R}^2$ , donc

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} = f^{-1}(]-\infty; 1])$$

est un fermé de  $\mathbb{R}^2$  car image réciproque par  $f$  du fermé de  $\mathbb{R} : ]-\infty; 1]$  et

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq \cos(\alpha)\} = g^{-1}(]-\infty; \cos \alpha])$$

est un fermé de  $\mathbb{R}^2$  car image réciproque par  $g$  du fermé de  $\mathbb{R} : ]-\infty; \cos \alpha]$ . Donc comme intersection de fermés :

$D_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq \cos \alpha\}$  est une partie fermée de  $\mathbb{C}$ .

De plus  $D_\alpha$  est bornée car incluse dans la boule de centre 0 et de rayon 1 pour la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^2$  est de dimension finie, donc

$D_\alpha$  est une partie compacte de  $\mathbb{C}$ .

**Q10.** Soit  $z \in D_\alpha$ , on note  $x = \operatorname{Re} z$ . Par somme d'une série géométrique de raison  $z \neq 1$  (car  $x \leq \cos \alpha < 1$ ) :

$$\begin{aligned} |F_n(z)| &= \left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| \\ &\leq \frac{1 + |z^{n+1}|}{|1 - z|} \\ &\leq \frac{2}{|\operatorname{Re}(1 - z)|} \quad (\forall w \in \mathbb{C}, |\operatorname{Re}(w)| \leq |w|) \\ &\leq \frac{2}{1 - x} \quad (z \in D_\alpha \text{ donc } x \leq \cos \alpha \leq 1) \\ &\leq \frac{2}{1 - \cos \alpha} \end{aligned}$$

pour tout  $z \in D_\alpha$  et tout entier naturel  $n$ , si  $x = \operatorname{Re}(z)$  :

$$|F_n(z)| \leq \frac{2}{1 - x} \leq \frac{2}{1 - \cos \alpha}$$

**Q11.** Soit  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ , d'après la question **Q14**, la suite de fonctions  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est uniformément bornée sur  $D_\alpha$ , de plus la suite  $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante de limite nulle, donc d'après la question **Q5** :

la série entière  $\sum \frac{z^n}{\sqrt{n}}$  converge uniformément sur tous les compacts  $D_\alpha$  (pour  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ ).

## Problème 2

Le but de ce problème est de démontrer et utiliser plusieurs critères pour prouver qu'une matrice symétrique réelle est définie positive. On rappelle que, pour un entier naturel non nul  $n$ , une matrice symétrique  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite définie positive si et seulement si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top M X > 0.$$

**Q12.** Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ,

$$\begin{aligned} X^\top A X &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + y \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 + 2xy + y^2 \end{aligned}$$

$$= x^2 + (x + y)^2 \geq 0$$

Supposons par l'absurde  $x^2 + (x + y)^2 = 0$  (somme nulle de termes positifs), donc  $x^2 = 0$  et  $(x + y)^2 = 0$ , donc  $x = 0$  et  $y = 0$  : d'où la contradiction.

Donc :  $X^\top A X > 0$ .

Conclusion

la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  est définie positive.

## Caractérisation spectrale

**Q13.** Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle pour que celle-ci soit définie positive : question de cours.

**Q14.** La fonction polynomiale associée à  $P$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$P'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 3)(x - 1).$$

on en déduit son tableau de variations :

|         |           |   |    |           |   |
|---------|-----------|---|----|-----------|---|
| $x$     | $-\infty$ | 1 | 3  | $+\infty$ |   |
| $P'(x)$ | +         | 0 | -  | 0         | + |
| $P$     | $-\infty$ | 1 | -4 | $+\infty$ |   |

La fonction  $P$  est strictement croissante et continue sur  $] -\infty; 1]$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) < 0 < P(1)$ , donc d'après le théorème de la bijection,  $P$  admet une unique racine  $\alpha_1 \in ] -\infty; 1[$ , de même  $P$  admet une unique racine  $\alpha_2 \in ] 1; 3[$  et une unique  $\alpha_3 \in ] 3; +\infty[$ . Donc :

le polynôme  $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$  admet trois racines réelles distinctes.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par développement par rapport à la première ligne,

$$\begin{aligned} \chi_B(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-3 \end{vmatrix} \\ &= (x-1) \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & x-2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)(x^2 - 5x + 5) - x + 2 \end{aligned}$$

$$= P(x)$$

On a montré que  $P$  admet 3 racines réelles distinctes, de plus  $P(0) = -3 < 0 = P(\alpha_1)$  et  $P$  est strictement croissante sur  $]-\infty; 1[$ , donc  $\alpha_1 > 0$ . Donc, toutes les valeurs propres de  $B$  sont strictement positives et  $B$  est symétrique réelle, donc d'après la caractérisation spectrale :

$B$  est définie positive.

## Un critère en dimension 2

Dans cette partie, on souhaite démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est définie positive si et seulement si sa trace et son déterminant sont strictement positifs.

**Q15.** Soit  $M$  une matrice définie positive, donc d'après le théorème spectral  $M$  est diagonalisable, en particulier son polynôme caractéristique est scindé. Donc  $\text{tr}(M)$  est la somme des valeurs propres de  $M$  et  $\det M$  est le produit des valeurs propres de  $M$  ; or  $M$  est définie positive, donc ses valeurs propres sont toutes strictement positives. Donc :

une matrice définie positive  $M$  de taille quelconque vérifie toujours  $\text{Tr}(M) > 0$  et  $\det(M) > 0$ .

**Q16.** Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  symétrique telle que  $\det M > 0$  et  $\text{tr} M > 0$ . D'après le théorème spectral  $M$  est diagonalisable, donc son polynôme caractéristique est scindé. Notons  $\alpha, \beta$  les valeurs propres de  $M$  avec multiplicité. Donc :  $\det M = \alpha\beta > 0$  donc  $\alpha$  et  $\beta$  sont non nulles et de même signe, de plus  $\text{tr} M = \alpha + \beta > 0$ , donc  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ . Donc d'après la caractérisation spectrale,  $M$  est définie positive.

une matrice symétrique  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , dont la trace et le déterminant sont strictement positifs, est définie positive.

**Q17.** Soit la matrice diagonale :  $M = \text{diag}(-1, -1, 3)$ , donc  $M$  est symétrique réelle,  $\det M = 3 > 0$  et  $\text{tr}(M) = 1 < 0$ , mais  $(-1)$  est une valeur propre de  $M$  négative ; donc d'après la caractérisation spectrale,  $M$  n'est pas définie positive.

Le résultat de la question précédente est faux pour les matrices symétriques de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

**Q18.** (question supprimée)

## Le critère de Sylvester

Dans cette partie, on étudie le critère de Sylvester, valable en toute dimension. Pour une matrice carrée quelconque  $M = (m_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et un entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on définit le  $k$ -ième mineur principal comme étant le déterminant de la matrice  $M_k = (m_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, k \rrbracket} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ . On précise qu'une matrice carrée de taille  $n$  possède  $n$  mineurs principaux.

Par exemple, les trois mineurs principaux de la matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  de la question **Q14** sont les déterminants des matrices  $B_1 = (1), B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  et

$$B_3 = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On dit qu'une matrice vérifie le critère de Sylvester si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs. On souhaite alors démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si elle vérifie le critère de Sylvester.

Par exemple, pour la matrice  $B$  de la question **Q14**, on constate que :

$$\det(B_1) = 1 > 0, \det(B_2) = 2 > 0 \text{ et } \det(B_3) = 3 > 0.$$

La matrice  $B$  vérifie le critère de Sylvester, elle est donc définie positive.

**Q19.** *erreur d'énoncé : on ne peut pas imposer  $X$  non nul si on ne suppose pas  $X_k$  non nul, contre ex avec  $M = I_n$  et  $X_k = 0$ , il n'existe pas de  $X$  non nul tel que  $X^\top I_n X = 0 \dots$*

On fixe une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , un entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , ainsi qu'un vecteur colonne  $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ .

On pose  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . En effectuant les calculs matriciels

par blocs :

$$\begin{aligned} X^\top M X &= \begin{pmatrix} X_k^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_k^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k X_k \\ * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= X_k^\top M_k X_k.$$

Conclusion :

le vecteur  $X$  est tel que :

$$X_k^\top M_k X_k = X^\top M X.$$

**Q20.** On suppose  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie positive. Soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et  $X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . Le vecteur  $X$  construit à la question précédente est alors non nul et :

$$X_k^\top M_k X_k = X^\top M X > 0$$

car  $M$  est définie positive ; cela est valable pour tout  $X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . Donc,  $M_k$  est définie positive, donc d'après la question **Q15**,  $\det M_k > 0$  (valable pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ). Donc :

toute matrice symétrique réelle définie positive vérifie le critère de Sylvester.

**Q21.** La matrice  $M_{n-1}$  est définie positive, donc de déterminant strictement positif, donc  $M_{n-1}$  est inversible. On pose  $V = -M_{n-1}^{-1}U$ , donc :  $M_{n-1}V + U = 0$ . Donc :

il existe un vecteur colonne  $V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$  tel que  $M_{n-1}V + U = 0$ .

$$\begin{aligned} Q^\top M Q &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ V^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0 \\ U^\top & U^\top V + \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{car } M_{n-1}V + U = 0) \\ &= \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0 \\ 0 & U^\top V + \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

car  $M_{n-1}$  est symétrique donc :  $V^\top M_{n-1} + U^\top = (M_{n-1}V + U)^\top = 0$ . On pose  $\beta = U^\top V + \alpha$ . Montrons que  $\beta > 0$ .

De plus, la matrice  $Q$  est diagonale par blocs, donc :  $\det Q = \det I_{n-1} \times \det 1 = 1$ . Donc :

$$\det(Q^\top M Q) = \det(Q^\top) \det M \det Q = \det M > 0$$

et, comme  $Q^\top M Q$  est diagonale par blocs :

$$\det(Q^\top M Q) = \det(M_{n-1}) \times \beta$$

or  $\det(M_{n-1}) > 0$ , donc  $\beta = \frac{\det M}{\det M_{n-1}} > 0$ .

Donc :

$$Q^\top M Q \text{ s'écrit par blocs } \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix} \text{ avec } \beta > 0.$$

**Q22.** Montrons par récurrence :  $\forall n \geq 2$  :

$\mathcal{P}(n)$  : si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est symétrique réelle et vérifie le critère de Sylvester, alors  $M$  est définie positive.

Initialisation : pour  $n = 2$ ,

$\mathcal{P}(2)$  est vraie d'après la question **Q16**.

Hérédité : soit  $n \in \mathbb{N}$ , tel que  $n \geq 3$  et  $\mathcal{P}(n-1)$ .

On suppose que  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est symétrique réelle et vérifie le critère de Sylvester. Donc  $M_{n-1}$  est symétrique réelle et vérifie le critère de Sylvester, donc par hypothèse de récurrence,  $M_{n-1}$  est définie positive.

D'après la question précédente, il existe une matrice inversible  $Q$  telle que  $Q^\top M Q = \text{diag}(M_{n-1}, \beta)$ .

Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ , on pose  $\begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} = Q^{-1}X$ , donc :  $X = Q \times \begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix}$  et

$$\begin{aligned} X^\top M X &= Q \begin{pmatrix} Y & z \end{pmatrix}^\top M Q \begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & z \end{pmatrix} Q^\top M Q \begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} \\ &= Y^\top M_{n-1} Y + \beta z^2 \end{aligned}$$

Or  $X \neq 0$  et  $Q$  est inversible, donc  $\begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} \neq 0$ , donc  $Y$  et  $z$  ne sont pas tous deux nuls ; or  $M_{n-1}$  est définie positive ; donc :  $X^\top M X = Y^\top M_{n-1} Y + \beta z^2 > 0$ . Donc  $M$  est définie positive. D'où  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Conclusion : par principe de récurrence :

toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

**Q23.** La matrice  $C(x)$  est symétrique réelle, les mineurs principaux sont :  $2, 1, 1 - 2x^2$  ; donc d'après le critère de Sylvester :

$C(x)$  est définie positive si et seulement si  $x \in ]-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}[$ .

**Q24.** La matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est symétrique ; son troisième mineur principal est strictement négatif, donc d'après le critère de Sylvester,

cette matrice n'est pas définie positive.

**Q25.** Soit  $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz = (x + y)^2 + \left(\frac{3}{2}x - z\right)^2 + \frac{3}{4}x^2$$

positif et non nul si  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ .

**Q26.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Donc  $S_n$  est sy-

métrique réelle et ses mineurs principaux sont les déterminants des matrices  $S_k$  pour  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ .

$$\det S_1 = \sqrt{3} \text{ et } \det S_2 = \sqrt{3}^2 - 1 = 2.$$

Soit  $k \geq 3$ , en développant suivant la dernière colonne :

$$\det S_k = \sqrt{3} \det S_{k-1} - 1 \det \begin{pmatrix} S_{k-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{3} \det S_{k-1} - \det S_{k-2}.$$

Donc la suite  $(\det S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, on en déduit :

$$\det S_3 = \sqrt{3}, \det S_4 = 1, \det S_5 = 0$$

(on n'a pas eu besoin de calculer le terme général de la suite pour pouvoir conclure).

D'après le critère de Sylvester,

$S_n$  est définie positive si et seulement si  $n \geq 4$ .