

FILTRE POUR ACCÉLÉROMÈTRE

On se propose de réaliser un filtre pour accéléromètre. Les accéléromètres sont des composants dont le premier objectif est de mesurer l'accélération. On peut en trouver dans de nombreux appareils tels les téléphones portables ou les manettes de Switch.

Un deuxième objectif sera d'étudier un traitement analogique permettant d'obtenir la vitesse et la position à partir de la mesure du signal fourni par l'accéléromètre.

On donne ci-dessous les formes canoniques d'un certain nombre de filtres du premier et du second ordre. $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ représente la pulsation réduite et ω_0 la pulsation propre.

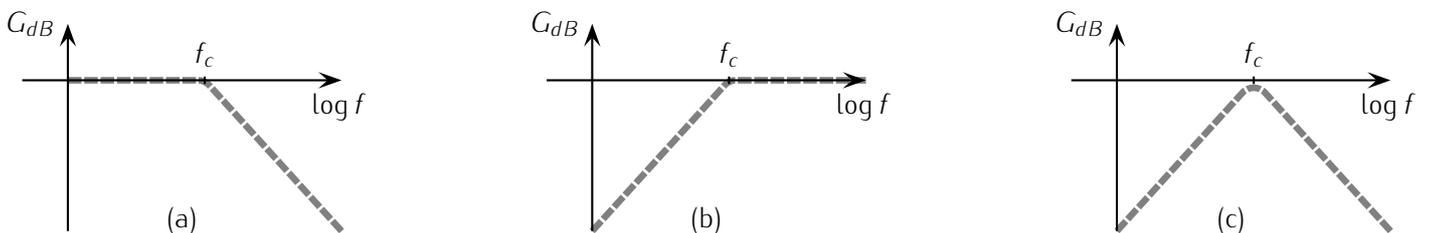
$$\begin{aligned} \underline{H}_1(jx) &= \frac{H_0}{1 + jx} & \underline{H}_2(jx) &= \frac{H_0 jx}{1 + jx} & \underline{H}_3(jx) &= \frac{H_0(1 + (jx)^2)}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2} \\ \underline{H}_4(jx) &= \frac{H_0}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2} & \underline{H}_5(jx) &= \frac{H_0 \frac{jx}{Q}}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2} & \underline{H}_6(jx) &= \frac{H_0(jx)^2}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2} \end{aligned}$$

0.1 Suppression de la composante continue

Les composants électroniques ont un comportement qui varie très légèrement avec la température, ce qui fait que la plupart des appareils de mesure ont une légère composante continue ou basse fréquence qui ne reflète pas nécessairement le signal que l'on cherche à étudier (l'accélération ici).

L'échelle de temps typique considérée pour ces variations indésirables est de l'ordre de 50 s au moins, soit des fréquences inférieures à 0,02 Hz.

Pour éliminer ce problème, on traite le signal en le faisant passer par un filtre de fréquence de coupure $f_c = 1$ Hz.



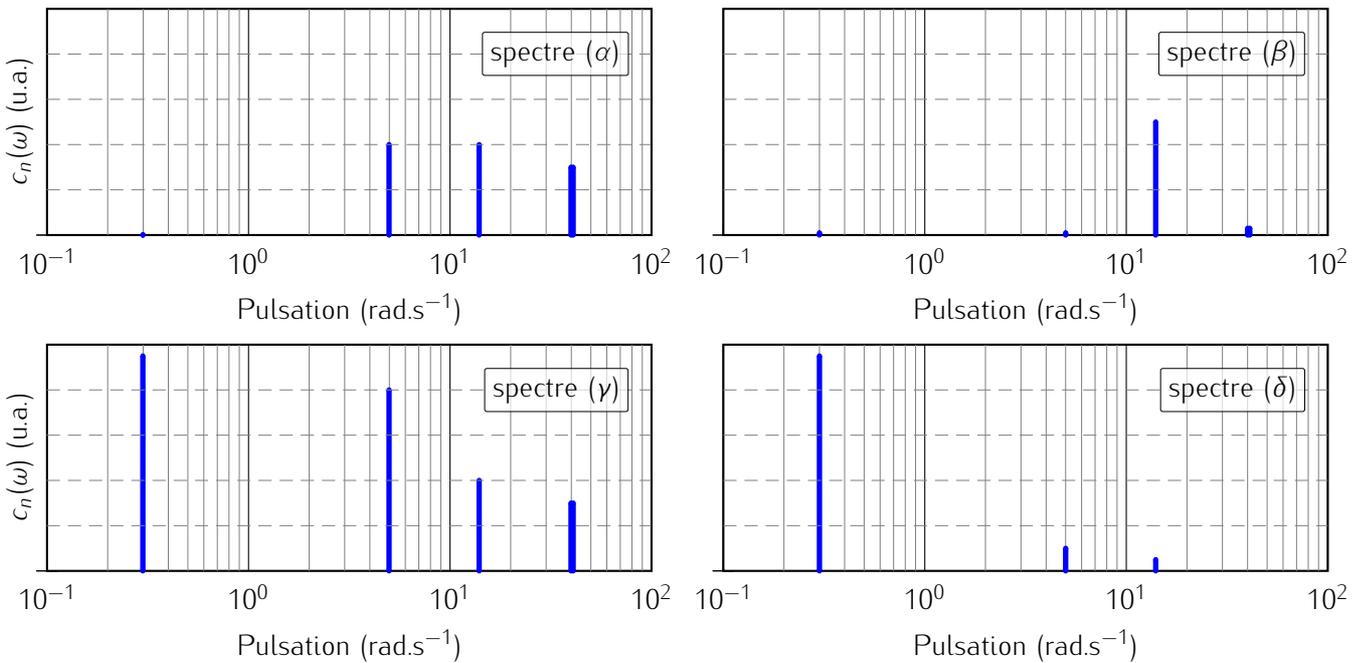
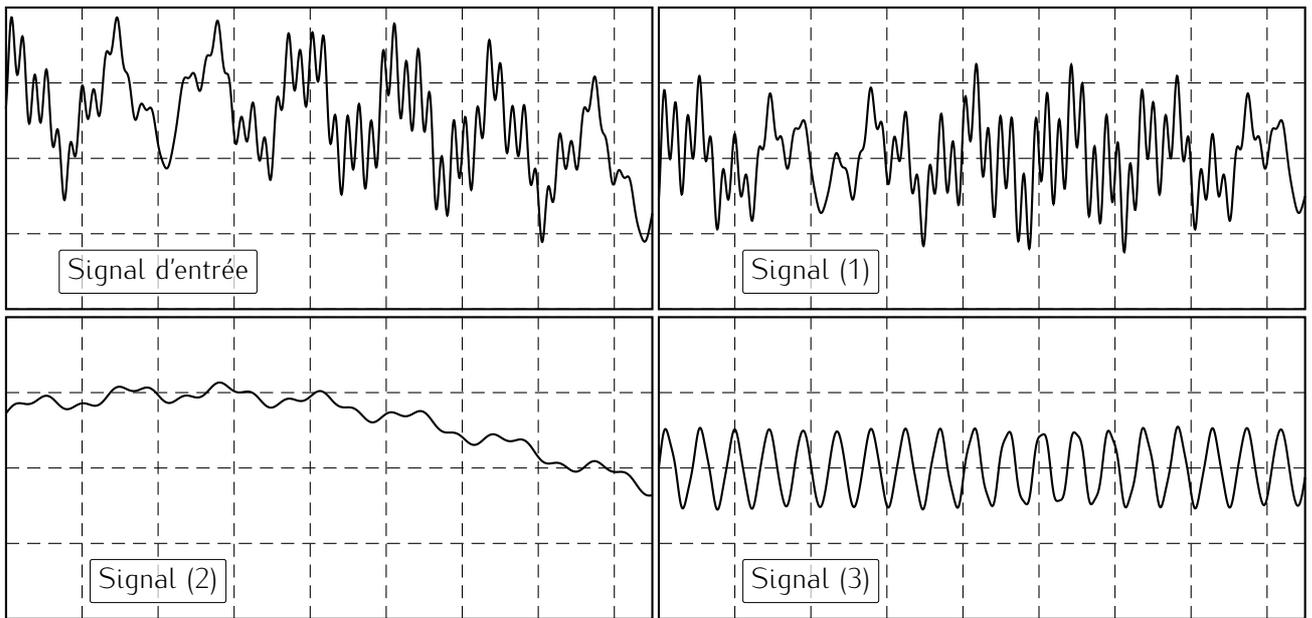
Q1 1. Parmi les filtres (a), (b) et (c) proposés ci-dessus, lequel correspond le mieux à l'utilisation que l'on veut en faire? Justifier brièvement.

Q2 2. On considère le signal représenté ci-dessous à gauche (signal d'entrée) en entrée des filtres ainsi que les trois signaux de sorties obtenus dans le désordre.

On donne aussi les 4 spectres correspondants à ces signaux (à nouveau dans le désordre).

Indiquer, en expliquant brièvement votre choix, à quel signal (entrée, 1, 2 et 3) correspond quel spectre (α , β , γ et δ). On synthétisera les réponses dans un **tableau**.

Signal	Entrée	(1)	(2)	(3)
Spectre				
Filtre (Question suivante)	—			



- Q3 3. On considère toujours le signal signal d'entrée en entrée des filtres proposés. Indiquer, en expliquant brièvement votre choix, à quel signal de sortie (1, 2 et 3) correspond quel filtre (a, b et c). On ajoutera les réponses sur le **tableau** précédent.
- Q4 4. On reprend le filtre choisi à la première question. Déterminer l'ordre du filtre sachant que l'amplitude du signal à 0,01 Hz est atténuée d'un facteur 100 par rapport à celle d'un signal à 0,1 Hz. On pourra justifier en effectuant une étude asymptotique de la fonction de transfert suivante

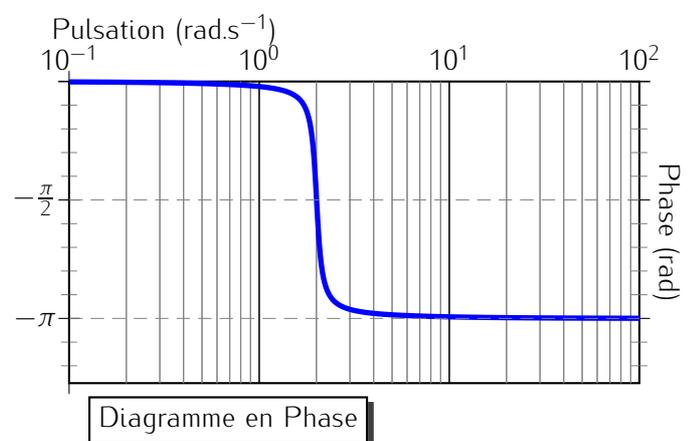
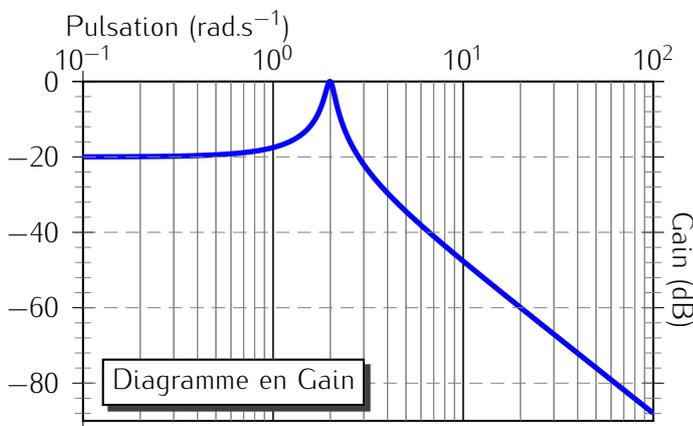
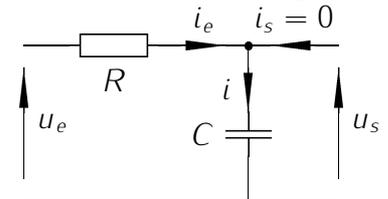
$$\underline{H}_n(j\omega) = \frac{H_0 \left(j \frac{\omega}{\omega_c} \right)^n}{1 + \left(j \frac{\omega}{\omega_c} \right)^n} = \frac{H_0 \left(j \frac{f}{f_c} \right)^n}{1 + \left(j \frac{f}{f_c} \right)^n}$$

correspondant à un filtre d'ordre n . On rappelle que pour le filtre choisi, on a $f_c = 1$ Hz.

0.2 Mesure du déplacement effectué

La position $x(t)$ d'un objet est reliée à son accélération $a(t)$ par la relation $a(t) = \ddot{x}(t)$. On peut ainsi remonter à la position de l'objet à partir de l'étude du signal de l'accéléromètre en intégrant deux fois le signal. Dans cette partie, l'objet étudié sera pris initialement au repos en $x = 0$.

- Q5 1. Si le signal que l'on souhaite mesurer est de la forme $a(t) = a_0 \cos(\omega t)$, quelle serait la forme du signal $x(t)$ correspondant ?
- Q6 2. On étudie maintenant le signal mesuré $a_m(t) = \epsilon + a(t)$ où ϵ est une erreur de mesure, constante. Quelle serait la forme $x_m(t)$ du signal que l'on déduirait de cette mesure par intégration ? En déduire qu'il est particulièrement important de supprimer la composante continue d'un signal que l'on souhaite intégrer.
- Q7 3. On considère un filtre RC ci-contre.
 (a) Établir sa fonction de transfert en justifiant.
 On donnera la réponse finale sous forme canonique.
- Q8 (b) Quelle serait la forme de la fonction de transfert d'un filtre idéal intégrateur ?
- Q9 (c) Pourquoi peut-on qualifier ce filtre de pseudo-intégrateur ?
- Q10 (d) On souhaite expérimentalement fixer $\omega_0 = 10^3$ rad/s. Proposer (en justifiant) des valeurs de R et C « raisonnables¹ » permettant de réaliser cela.
4. Filtre double intégrateur :
- Q11 (a) Quelle serait la fonction de transfert d'un filtre idéal intégrant deux fois (pour passer de l'accélération à la position) ?
- Q12 (b) En déduire un diagramme de Bode en amplitude et en phase (si des constantes apparaissent, vous pouvez choisir des valeurs arbitraires à condition de les préciser).
5. On propose un filtre dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous et dont la forme canonique est H_A (cf page 1).



- Q13 (a) Effectuer l'étude asymptotique de la fonction de transfert pour donner l'équation des asymptotes à basse et haute fréquence pour le diagramme en gain. Vérifier explicitement l'accord avec le graphique.
- Q14 (b) Existe-t-il une gamme de fréquence où le filtre proposé a le bon comportement, c'est-à-dire une fonction de double intégrateur ? Si oui, laquelle ?
- Q15 (c) Montrer que les asymptotes se coupent en $\omega = \omega_0$ et en déduire graphiquement la valeur de ω_0 .
- Q16 (d) Déterminer graphiquement la valeur de H_0 .
- Q17 (e) Déterminer graphiquement la valeur du facteur de qualité Q . On pourra se placer en ω_0 .

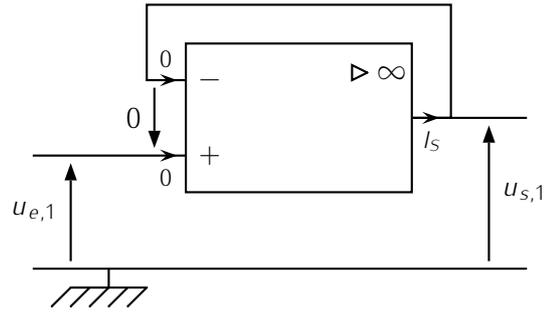
1. c'est-à-dire à l'aide de composants disponibles en TP.

0.3 Mise en cascade des filtres

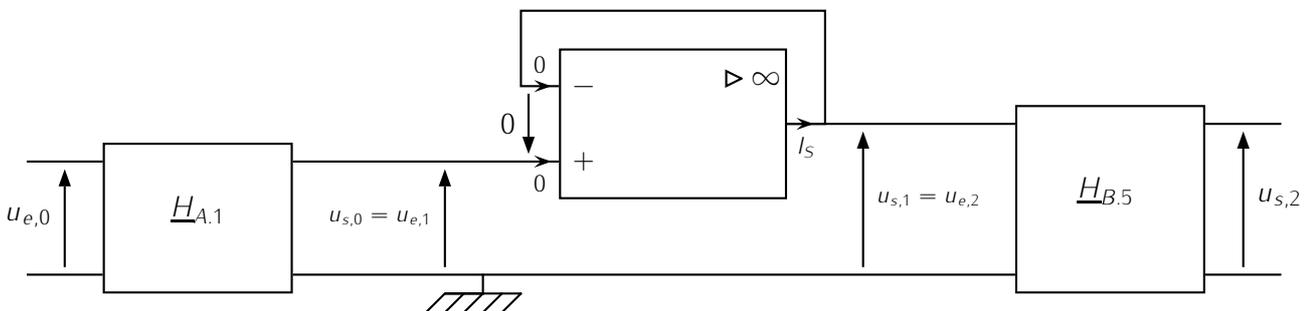
Il est possible de faire cette partie même si les parties précédentes n'ont pas été traitées correctement dans leur totalité.

On considère le montage représenté ci-contre, appelé montage suiveur. Le composant représenté par un rectangle est un amplificateur linéaire intégré (ou amplificateur opérationnel) qui possède les propriétés suivantes :

- les courants I_- et I_+ entrant dans les bornes $-$ et $+$ sont nuls ;
- les potentiels V_- et V_+ des bornes $-$ et $+$ sont égaux, c'est-à-dire que la tension $\varepsilon = V_+ - V_-$ est nulle ;
- le courant de sortie I_S est inconnu et s'adapte pour que les conditions précédentes soient vérifiées.



- Q18 1. Établir la fonction de transfert $\underline{H}_S = \frac{u_{s,1}}{u_{e,1}}$ de ce montage et vérifier qu'elle est indépendante de la fréquence.
On pourra éventuellement raisonner sur les potentiels.
Justifier l'appellation de montage suiveur.
- Q19 2. En se rappelant des propriétés sur les courants d'entrée et de sortie de l'amplificateur linéaire intégré, quel est l'intérêt de ce montage suiveur ?
3. On met maintenant le filtre trouvé à la question (A.1) de fonction de transfert $\underline{H}_{A,1}$, le montage suiveur, et le filtre présenté à la question B.5 de fonction de transfert $\underline{H}_{B,5}$ en cascade tel que présenté ci-dessous.
- Q20 Déterminer alors la fonction de transfert du montage complet : $\underline{H}_{tot} = \frac{u_{s,2}}{u_{e,0}}$ en fonction de $\underline{H}_{A,1}$ et $\underline{H}_{B,5}$.
Justifier votre réponse.



- Q21 4. Les diagrammes de Bode en gain étant connus pour les filtres $\underline{H}_{A,1}$ et $\underline{H}_{B,5}$, comment peut-on en déduire graphiquement le diagramme de Bode en gain du montage complet ?
Compte tenu de vos réponses aux questions précédentes, tracer l'allure de ce diagramme (des points seront accordés si la méthode est correcte, même si les questions précédentes sont fausses).

Cette remarque est pertinente pour plusieurs questions, je la mets donc au début du problème. Lorsque l'on vous demande une étude asymptotique, il ne suffit pas de regarder les limites, mais il faut étudier les asymptotes et en particulier leur pente. Ainsi $H \rightarrow 0$ ne correspond pas à une étude asymptotique, alors que $H \simeq -60 \log(\omega/\omega_0)$ si $\omega \gg \omega_0$ si. On a plus d'information dans le second cas car on sait « comment » (c'est-à-dire à quelle vitesse) on tend vers 0.

FILTRE POUR ACCÉLÉROMÈTRE

0.4 Suppression de la composante continue

Q22 1. L'énoncé nous indique que l'on souhaite éliminer la composante continue et les basses fréquences : il nous faut donc utiliser un filtre passe-haut. Il s'agit donc du filtre (b).

2. En terme de spectre, le signal d'entrée est forcément le plus « riche » en harmonique puisqu'un filtre linéaire ne peut pas faire apparaître de nouvelles fréquences²

Ainsi le signal d'entrée correspond au spectre (γ).

Le signal (1) ressemble énormément au signal d'entrée, mais sans la variation à basse fréquence (pente légèrement descendante dans le signal d'entrée), ainsi le signal (1) correspond au spectre (α où les composantes basse fréquence ont été atténuées, en particulier la composante à 0,3 rad/s.

Le signal (3) est quasiment sinusoïdal, il correspond donc au spectre (β) qui ne contient presque qu'un seul sinus.

Le signal (2) par contre ne contient presque qu'une composante basse fréquence (lentes variations auxquelles se superposent des petites oscillations), il correspond donc au spectre (δ) dans lequel la composante basse fréquence domine largement.

Q23 on en déduit la deuxième ligne tableau de correspondance suivant :

Signal	Entrée	(1)	(2)	(3)
Spectre	(γ)	(α)	(δ)	(β)
Filtre	–	(b)	(a)	(c)

3. Puisque le signal (1) correspond au signal d'entrée sans la basse fréquence, alors il correspond à la sortie du filtre (b), qui laisse passer les hautes fréquences et atténue les basses fréquences.

De même, le signal (2) correspond au signal d'entrée où les hautes fréquence ont été atténuées par rapport aux basses, il est donc obtenue en sortie du filtre (a).

Le signal (3) quant à lui est quasiment sinusoïdal : un seul pic a été sélectionné et le filtre est de type passe-bande : c'est le (c).

Q24 Voir plus haut pour le tableau.

4. La fonction de transfert est de la forme
$$\frac{H_0 \left(j\frac{f}{f_c}\right)^n}{1 + \left(j\frac{f}{f_c}\right)^n} \simeq \frac{H_0 \left(j\frac{f}{f_c}\right)^n}{1} \quad \text{si } f \ll f_c$$

On en déduit que le gain est de la forme $G(f) = |H_0| \left(\frac{f}{f_c}\right)^n$. On veut de plus $G(f_1 = 0,01 \text{ Hz}) = G(f_2 =$

Q25 $0,1 \text{ Hz} = 10f_1)/100 \Leftrightarrow |H_0| \left(\frac{f_1}{f_c}\right)^n = \frac{|H_0|}{100} \left(\frac{10f_1}{f_c}\right)^n \Leftrightarrow 10^n = 100 \Rightarrow \boxed{n = 2}$.

Attention, atténué d'un facteur 100 en une décade ne veut pas du tout dire 100 dB/décade. À cause du logarithme fois vingt, un facteur dix correspond à 20 dB/décade, un facteur cent à 40 dB/décade etc...

0.5 Mesure du déplacement effectué

Q26 1. Si le signal que l'on souhaite mesurer est de la forme $a(t) = a_0 \cos(\omega t)$, alors la forme du signal $x(t)$

2. Attention toutefois, un filtre ne peut pas faire apparaître de nouvelles fréquences mais il peut amplifier des fréquences existantes.

correspondant est $x(t) = \frac{a_0}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t)) + 0t + 0$, soit un signal sinusoïdal.

Attention à la constante d'intégration : $x(0) = 0$ n'implique pas toujours que la constante d'intégration est nulle. Ici $\cos(0) = 1$ donc il faut une constante d'intégration pour que $x(t = 0) = 0$. C

Q27

2. Si le signal mesuré est $a_m(t) = \epsilon + a(t)$ alors $x_m(t) = \frac{a_0}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t)) + \epsilon \frac{t^2}{2}$, ainsi on a l'impression que l'objet se déplace sous l'effet d'un accélération constante. L'erreur commise augmente rapidement au cours du temps.

Il est donc important de supprimer le bruit basse fréquence (ici ϵ) avant d'intégrer, ce qui peut-être problématique si le signal recherché est lui aussi basse-fréquence.

3. (a) En utilisant un pont diviseur de tension car $i_s = 0$, on en déduit $\frac{u_s}{u_e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + jx}$

Q28

où $x = \frac{\omega}{\omega_0} = RC\omega \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{RC}$

Q29

(b) Un filtre idéal intégrateur aurait une fonction de transfert de la forme $A/j\omega$ avec A une constante positive ou négative ($1/j\omega$ ne serait pas homogène puisque u_s/u_e est sans dimension).

Q30

(c) Ce filtre peut-être qualifié de pseudo-intégrateur car sa fonction de transfert en haute fréquence est équivalente à celle d'un filtre intégrateur : si $x \gg 1$ alors $\frac{1}{1+jx} \simeq \frac{1}{jx} = \frac{\omega_0}{j\omega}$. Par contre, ce n'est pas un vrai intégrateur car ce comportement n'est pas valable à basses fréquences.

(d) On souhaite expérimentalement fixer $\omega_0 = 10^3$ rad/s, soit $RC = 10^{-3}$ s

Les composants accessibles en TP varie essentiellement dans la gamme $R \in [1 \Omega, 1 M\Omega]$ (mais il vaut mieux se limiter à $R \in [100 \Omega, 100 k\Omega]$ pour limiter les problèmes liées aux impédances d'entrée de l'oscilloscope et de sortie du générateur) et $C \in [0,1 nF, 10 \mu F]$.

Q31

Les valeurs $R = 10 k\Omega$ et $C = 0,1 \mu F$ peuvent donc correspondre à ce "cachier des charges".

Si vous prenez des valeurs "fantaisistes" telles $0,01 \Omega$ ou $0,1 F$, vous donnez l'impression de ne jamais avoir fait de TP de physique.

4. Filtre double intégrateur :

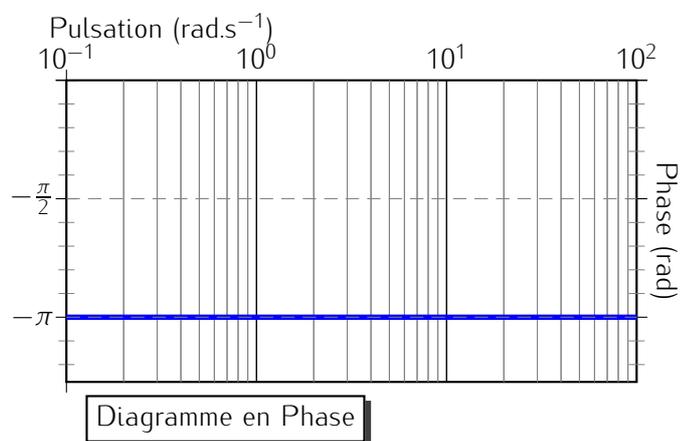
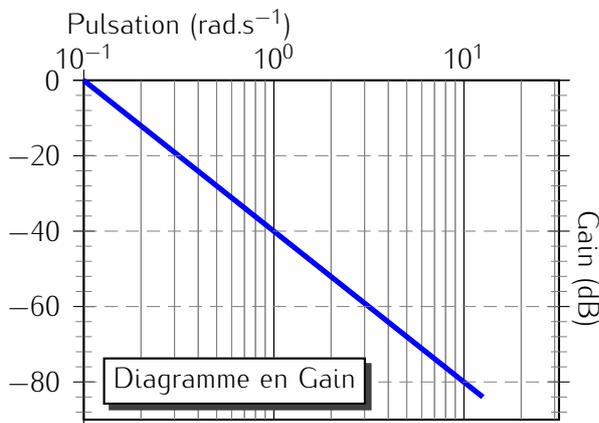
Q32

(a) Pour un filtre idéal intégrant deux fois il faut donc avoir une fonction de transfert qui divise par $(j\omega)^2$ soit une fonction de transfert de la forme $\frac{A}{(j\omega)^2}$.

Q33

(b) $G_{dB} = 20 \log(A) - 40 \log(\omega)$, d'où une pente de -40 dB/décade pour le diagramme en gain. $\varphi = 0$ ou $\pm\pi$ selon si A est négatif (0) ou positif ($\pm\pi$).

D'où les diagrammes suivant en choisissant $A = 0,1$ (rad/s)² :



Tracez les diagramme correspondant réellement à votre fonction de transfert : il n'y a ici aucune asymptote horizontale sur le diagramme en gain, et aucune variation de la phase.

5. (a) $G = |H_4(jx) = \frac{H_0}{1 + \frac{x}{Q} + (jx)^2}| = \frac{H_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}$. (H_0 positif vu que la phase est 0 en basse fréquence) Étude

asymptotique :

- pour $x \ll 1$: $G \simeq H_0$ d'où $G_{dB} = 20 \log H_0$. On a donc une constante, représentée par une droite horizontale, ce qui correspond au diagramme pour $\omega < 4$ rad/s environ.
- pour $x \gg 1$: $G \simeq H_0/x^2$ d'où $G_{dB} = 20 \log H_0 - 40 \log x$. On a donc une droite de pente -40 dB/décade, ce est cohérent avec le graphique vu qu'entre $\omega = 10^1$ rad/s et 10^2 rad/s on passe de -48 à -88 dB environ. On peut aussi regarder que l'on passe de -40 à -80 dB entre 6,5 et 65 rad/s ce qui donne bien aussi une pente de -40 dB/décade.

Montrez que vous avez fait les mesures sur le graphique pour vérifier l'accord pour la pente en indiquant les points considérés lors de votre mesure. Simplement dire « cela correspond » ne suffit pas puisqu'il était demander de vérifier explicitement.

(b) Pour $\omega > 4$ rad/s, la courbe en gain a bien -40 dB/décade et correspond donc au comportement nécessaire pour un intégrateur. De même la courbe en phase donne une phase de $-\pi$ ce qui est cohérent avec le comportement double-intégrateur. Ainsi le comportement est le bon pour les pulsations suffisamment élevées, ce qui correspond aux fréquences suffisamment élevées vu que $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Donc pour $f \in [0,7 \text{ Hz}, +\infty[$ environ, le comportement du filtre est celui d'un double intégrateur.

N'oubliez pas de vérifier la phase aussi.

(c) Pour cette question, tout le travail a été fait lors de l'étude asymptotique : la première asymptote a pour équation $G_{dB,1} = 20 \log H_0$ et la deuxième $G_{dB,2} = 20 \log H_0 - 40 \log x$. Il y a donc intersection lorsque $G_{dB,1} = G_{dB,2}$ soit $20 \log H_0 = 20 \log H_0 - 40 \log x \Rightarrow x = 1$. On a donc bien intersection des asymptotes en $\omega = \omega_0$. Graphiquement, on lit $\omega_0 = 2$ rad/s.

(d) Pour trouver H_0 , on utilise le comportement basse fréquence : $20 \log H_0 = -20$ d'où $H_0 = 0,1$ (le signe s'obtient à partir de la phase, nulle, il s'agit donc d'un réel positif).

(e) En en $\omega = \omega_0$, $H = \frac{H_0}{1-1+j\frac{1}{Q}} = QH_0 \Rightarrow G = 20 \log H_0 + 20 \log Q$. Par lecture graphique $G_{dB}(\omega = \omega_0) = 0 \Rightarrow G = H_0Q = 1$ d'où $Q = 10$.

0.6 Mise en cascade des filtres

1. Le plus simple est selon moi de raisonner sur les potentiels : tout les points reliés par un fil sont au même potentiel électrique. La tension d'entrée vaut $u_{e,1} = V_+ - 0$, la tension de sortie vaut $u_{s,1} = V_- - 0$, or d'après l'énoncé $V_+ = V_-$, d'où $u_{s,1} = u_{e,1}$ et donc $H_s = 1$. La réponse est donc bien indépendante de la fréquence puisqu' ω n'apparaît pas dans l'expression.

Le montage s'appelle donc suiveur car la tension en sortie est exactement la même que celle en entrée.

2. Ce montage est au premier abord surprenant puisqu'il a à première vue le même comportement qu'un simple fil entre l'entrée et la sortie. Toutefois son intérêt réside dans l'isolation entre la source et la charge. En effet, le courant d'entrée est nul, ainsi le montage précédent le suiveur ne délivre jamais de courant et sa fonction de transfert est donc la même qu'en sortie ouverte. De même l'amplificateur adapte son courant (dans la limite de ses capacités) pour maintenir la bonne tension de sortie : il se comporte donc comme un montage d'impédance de sortie nulle (la tension ne varie pas en fonction du courant) : il s'agit donc d'un montage qui permet d'isoler les filtres. Si les impédances d'entrée ne sont pas très grandes devant les impédances de sorties, on peut rajouter un suiveur qui permet de réaliser cette condition qui permet de faciliter l'étude du montage complet.

3. Puisque le suiveur a une impédance d'entrée infinie et une impédance de sortie nulle, on peut simplement faire le produit des fonctions de transfert, ce qui n'aurait a priori pas été le cas si on avait mis directement $H_{A,1}$ et $H_{E,5}$ en cascade.

Q41 La fonction de transfert H_{tot} vaut donc $H_{tot} = \frac{u_{s,2}}{u_{e,0}} = \frac{u_{s,2}}{u_{e,2}} \frac{u_{s,1}}{u_{e,1}} \frac{u_{s,0}}{u_{e,0}} \Rightarrow H_{tot} = H_{A,1} \times 1 \times H_{E,5}$.

Q42 4. Nous avons vu à la question précédente que $H_{tot} = H_{A,1} \times 1 \times H_{E,5} \Rightarrow G_{dB,tot} = G_{dB,A,1} + 0 + G_{dB,E,5}$: d'après les propriétés du logarithme. Il suffit donc de sommer les fonction de transfert. On obtient l'allure du diagramme ci-dessous :

