

CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON 9

EXERCICE 1 : *Extrait CCINP PC 2020*

Q1. Soit $x > 0$.

La fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles.

Pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a $|\sin(t)| \leq |t|$ donc $0 \leq |f(x, t)| = \left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \right| \leq e^{-xt}$.

Or, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ converge (intégrale de référence avec $x > 0$).

Par comparaison, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(x, t)| dt$ converge c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{la fonction } t \mapsto f(x, t) \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[.}$$

Q2. Soit $x \geq 0$.

La fonction $t \mapsto u(x, t)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout $t \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= -\frac{x \cos(t) - \sin(t)}{1 + x^2} e^{-xt} - \frac{x \sin(t) + \cos(t)}{1 + x^2} \times (-x) e^{-xt} \\ &= \frac{-x \cos(t) + \sin(t) + x^2 \sin(t) + x \cos(t)}{1 + x^2} e^{-xt} \\ &= \frac{(1 + x^2) \sin(t)}{1 + x^2} e^{-xt} = \sin(t) e^{-xt}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{la fonction } t \mapsto u(x, t) \text{ est bien une primitive de la fonction } t \mapsto \sin(t) e^{-xt} \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

Q3. Utilisons le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

— Soit $t \in]0, +\infty[$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-xt} = 0$ (car $t > 0$) donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} = 0 \in \mathbb{R}$ (produit par une constante).

— Soit $t \in]0, +\infty[$ et $x \in [1, +\infty[$.

On a $0 \leq |f(x, t)| = \left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \right| \leq e^{-xt} \leq e^{-t}$ (ne dépend pas de x).

Or, la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est positive et d'intégrale convergente sur $]0, +\infty[$ (intégrale de référence avec $1 > 0$) donc $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On en déduit par le théorème de convergence dominée à paramètre continu que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0.}$$

Q4. Soit $a > 0$.

— Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (d'après la question Q1 avec $x \geq a > 0$).

— Pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et pour tout $x \geq a$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin(t) e^{-xt}.$$

— Pour tout $x \in [a, +\infty[$ et pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = | -\sin(t)e^{-xt} | \leq e^{-xt} \leq e^{-at} \text{ (ne dépend pas de } x \text{)}.$$

De plus, la fonction $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (car $a > 0$, intégrale de référence).

On en déduit par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et pour tout $x \geq a$, $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = - \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt} dt$.

$$F \text{ est dérivable sur } [a, +\infty[\text{ et pour tout } x \in [a, +\infty[, F'(x) = - \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt} dt.$$

Q5. Comme F est dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, F est dérivable sur $]0, +\infty[$ (la dérivabilité est une propriété locale) et on a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= - \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt} dt = - [u(x, t)]_0^{+\infty} = - \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) - \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) \right) = - \left(0 + \frac{1}{1+x^2} \right) \\ &= - \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

car pour tout $t > 0$, $0 \leq |u(x, t)| \leq \frac{x+1}{1+x^2} e^{-xt}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{1+x^2} e^{-xt} = 0$ d'où la limite en $+\infty$ par le théorème de limite par encadrement.

$$F \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et pour tout } x \in]0, +\infty[, F'(x) = - \frac{1}{1+x^2}.$$

La fonction F est une primitive de F' sur l'intervalle $]0, +\infty[$ donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $F(x) = -\arctan(x) + K$.

Comme on a vu que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, on a $-\frac{\pi}{2} + K = 0$ donc $K = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi :

$$\text{pour tout } x > 0, F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Q6. Notons qu'on a pour tout $x \in [0, 1]$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$.

Utilisons le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

— Pour tout $t \in]0, 1]$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$.

— Pour tout $t \in]0, 1]$, pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$|f(x, t)| = \left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \right| \leq e^{-xt} \leq 1 \text{ (ne dépend pas de } x \text{)}.$$

La fonction constante $t \mapsto 1$ est continue par morceaux sur le segment $[0, 1]$ et donc intégrable sur $]0, 1]$.

On en déduit par le théorème de continuité des intégrales à paramètre que :

$$\text{la fonction } F_1 \text{ est bien définie et continue sur } [0, 1].$$

Q7. La fonction $t \mapsto \frac{u(x, t)}{t^2}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.

On a pour tout $t \geq 1$:

$$t^{3/2} \left| \frac{u(x, t)}{t^2} \right| = \left| \frac{x \sin(t) + \cos(t)}{1+x^2} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} \right| \leq \frac{x+1}{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, $\left| \frac{u(x, t)}{t^2} \right| =_{t \rightarrow +\infty} o\left(\frac{1}{t^{3/2}} \right)$.

De plus, pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\frac{1}{t^{3/2}} \geq 0$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$ converge (Riemann en $+\infty$ avec $\frac{3}{2} > 1$). Par comparaison, on en déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2} dt$ converge absolument c'est-à-dire :

$$t \mapsto \frac{u(x, t)}{t^2} \text{ est intégrable sur } [1, +\infty[.$$

Q8. Soit $x \in [0, 1]$.

Les fonctions $w : t \mapsto u(x, t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ et on a pour tout $t \geq 1$:

$$w'(t) = \sin(t)e^{-xt} \text{ et } v'(t) = -\frac{1}{t^2}.$$

On a de plus :

$$|w(t)v(t)| = \left| \frac{u(x, t)}{t} \right| \leq \frac{x+1}{1+x^2} \frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } w(t)v(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \in \mathbb{R}.$$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} w(t)v'(t)dt = \int_1^{+\infty} -\frac{u(x, t)}{t^2}dt$ converge d'après la question précédente, on en déduit par intégration par parties que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x, t)dt = \int_1^{+\infty} w'(t)v(t)dt$ converge et on a l'égalité :

$$F_2(x) = \int_1^{+\infty} u'(t)v(t)dt = \left[\frac{u(x, t)}{t} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2}dt.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &\text{la fonction } F_2 \text{ est bien définie sur } [0, 1] \text{ et pour tout } x \in [0, 1] : \\ &F_2(x) = \frac{x \sin(1) + \cos(1)}{1+x^2} e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Q9. Montrons que la fonction $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2} dt$ est continue sur $[0, 1]$.

— Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $x \mapsto \frac{u(x, t)}{t^2}$ est continue sur $[0, 1]$.

— Pour tout $x \in [0, 1]$, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$\left| \frac{u(x, t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2} \frac{x+1}{1+x^2} \leq \frac{2}{t^2} \text{ (ne dépend pas de } x)$$

car $0 \leq x+1 \leq 1$ et $1+x^2 \geq 1 > 0$.

De plus, la fonction $t \mapsto \frac{2}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann en $+\infty$ avec $2 > 1$).

On en déduit par le théorème de continuité des intégrales à paramètre que la fonction $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2} dt$ est continue sur $[0, 1]$.

De plus, $x \mapsto \frac{x \sin(1) + \cos(1)}{1+x^2} e^{-x}$ est continue sur $[0, 1]$ (par opérations sur les fonctions usuelles).

Par somme de fonctions continues, on en déduit que :

$$\text{la fonction } F_2 \text{ est continue sur } [0, 1].$$

Q10. • Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, comme les intégrales $\int_0^1 f(x, t)dt$ et $\int_1^{+\infty} f(x, t)dt$ convergent, $\int_0^{+\infty} f(x, t)dt$ converge et on a par la relation de Chasles :

$$F(x) = \int_0^1 f(x, t)dt + \int_1^{+\infty} f(x, t)dt = F_1(x) + F_2(x).$$

Par somme de fonctions continues, on en déduit que :

la fonction F est bien définie et continue sur $[0, 1]$ et donc en particulier en 0.

• On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge et elle a pour valeur $F(0)$.

Par continuité de F en 0 :

$$F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \right) = \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale de Dirichlet a pour valeur $\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2 : (*extrait Mines PSI 2019*)

1. Nous allons prouver simultanément l'existence et la continuité de $\widehat{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$ grâce au théorème de continuité des intégrales à paramètre.

Posons pour tout $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\phi(\xi, t) = e^{it\xi}\varphi(t)$.

★ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto \phi(\xi, t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par composition avec $\exp$ continue sur $\mathbb{C}$.

★ On a pour tout $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$|\phi(\xi, t)| = \varphi(t) \leq \varphi(t) \text{ (ne dépend pas de } \xi \text{)}$$

avec φ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque c'est une densité sur $\mathbb{R}$.

On en déduit par le théorème de continuité des intégrales à paramètres que :

la fonction $\widehat{\varphi} : \xi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}\varphi(t)dt$ est correctement définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. On reprend les notations de la question 1.

★ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $\xi \mapsto \phi(\xi, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par théorèmes opératoires.

On a de plus :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi, t) = ite^{it\xi}\varphi(t).$$

★ Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \phi(\xi, t) \in \mathcal{C}_m(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $t \mapsto \phi(\xi, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (puisque son module est la densité φ , qui est intégrable sur $\mathbb{R}$).

★ Pour tout $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a :

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi, t) \right| = |t|\varphi(t) \text{ (ne dépend pas de } \xi \text{)}.$$

La fonction $t \mapsto |t|\varphi(t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$. Montrons qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^3 \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{3 \ln t - \frac{1}{2} t^2} = 0$ car $3 \ln t - \frac{1}{2} t^2 \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} t^2$ par croissances comparées donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (3 \ln t - \frac{1}{2} t^2) = -\infty.$$

On en déduit que $|t|\varphi(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$.

Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, on en déduit que $t \mapsto |t|\varphi(t)$ l'est également.

Par ailleurs, la fonction $t \mapsto |t|\varphi(t)$ étant paire, l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} |t|\varphi(t)dt$ est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} |t|\varphi(t)dt$ (par le changement de variable affine $u = -t$) donc elle converge également.

Ainsi, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\varphi(t)dt$ converge (absolument) donc $t \mapsto |t|\varphi(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètres, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'application } \widehat{\varphi} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} \varphi(t) dt \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

et on a :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi}'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi, t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} ite^{it\xi} \varphi(t) dt \quad \text{d'où} \quad \boxed{\widehat{\varphi}'(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi} te^{-\frac{t^2}{2}} dt.}$$

3. Soit $\xi \in \mathbb{R}$.

Les applications $u = -\varphi$ et $v : t \mapsto e^{it\xi}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par théorèmes opératoires de dérivées $u' : t \mapsto t\varphi(t)$ et $v' = i\xi v$. La fonction uv a pour module $|(uv)(t)| = |t|\varphi(t)$ pour tout t réel donc tend vers 0 en $\pm\infty$ par croissances comparées. Comme $u'v$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (cf domination de Q2), une intégration par parties est licite (chaque terme écrit existe) :

$$-i\widehat{\varphi}'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)u'(t)dt = \underbrace{[u(t)v(t)]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} v'(t)u(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi v(t)\varphi(t)dt$$

Donc par linéarité comme $\widehat{\varphi}(\xi)$ existe : $\boxed{\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi}'(\xi) = -\xi \widehat{\varphi}(\xi).}$

4. Une primitive de l'application $\xi \mapsto -\xi$ continue sur $\mathbb{R}$ est $\xi \mapsto -\frac{\xi^2}{2}$, donc la théorie des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficient continu sur un intervalle (ici $\mathbb{R}$) nous assure qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi}(\xi) = \lambda e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

Or $\widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt = 1$ car φ est une densité sur $\mathbb{R}$ donc $\lambda = 1$.

Ainsi :

$$\boxed{\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.}$$

5. • L'application f est bien positive sur $[0, +\infty[$.

• Comme composée, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Or pour $x > 0$, on a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\ln(x) - \frac{1}{2}(\ln(x))^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left(1 + \frac{\ln(x)}{2}\right) \times \ln(x)\right)$

Or $\ln$ tend vers $-\infty$ en 0 donc le contenu de $\exp$ tend par produit vers $-\infty$ en 0 et par composition avec $\exp$ qui tend vers 0 en $-\infty$, $f|_{\mathbb{R}_+^*}$ admet une limite à savoir 0 en 0. Comme $f(0) = 0$, f est continue en 0. Finalement f est continue sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

• On sait par l'énoncé que φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale 1.

Par le théorème de changement de variable, en posant $t = \ln(x)$, on obtient que les intégrales $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} \frac{1}{x} dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt$ sont de même nature donc convergentes et de même valeur donc égales à 1.

Finalement, on a bien prouvé que :

$$\boxed{f \text{ est une densité sur } \mathbb{R}_+}.}$$

6. Soit n dans $\mathbb{N}$.

L'énoncé assure l'existence de $\widehat{\varphi}(2\pi - in)$ ($\widehat{\varphi}$ est définie sur $\mathbb{C}$ donc $g_n : t \mapsto \exp(it(2\pi - in))\varphi(t)$)

est d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}$). Par le changement de variable $t = \ln x$, on a alors (intégrales convergentes et donc de même valeur) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(it(2\pi - in))\varphi(t)dt = \int_0^{+\infty} \exp(i(2\pi - in)\ln(x)) \varphi(\ln(x)) \ln'(x)dx$$

i.e. $\widehat{\varphi}(2\pi - in) = \int_0^{+\infty} x^n \exp(2i\pi \ln(x)) f(x)dx$

donc en prenant la partie imaginaire et par linéarité :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\widehat{\varphi}(2\pi - in)) &= \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} x^n \exp(2i\pi \ln(x)) f(x)dx\right) \\ &= \int_0^{+\infty} \operatorname{Im}\left(\underbrace{x^n}_{\in \mathbb{R}} \exp(2i\pi \ln(x)) \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}}\right)dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^n f(x) \sin(2i\pi \ln(x))dx \\ &= I_n \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien
$$I_n = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(2\pi - in)u} e^{-\frac{1}{2}u^2} du\right) = \operatorname{Im}(\widehat{\varphi}(2\pi - in))$$

7. D'après la question précédente et Q4 étendue à $\mathbb{C}$, on a

$$I_n = \operatorname{Im}\left(e^{-\frac{(2\pi - in)^2}{2}}\right) = \operatorname{Im}\left(\underbrace{e^{-\frac{4\pi^2 - n^2}{2}}}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{e^{2\pi in}}_{=1}\right) = 0 \text{ car } n \text{ est un entier. Donc } \boxed{I_n = 0 \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.}$$

8. • Par composition et produit, g_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ pour toute valeur $\alpha \in \mathbb{R}$, et comme $\sin$ est bornée et f tend vers 0 en 0, g_α tend vers 0 en 0. Donc g_α est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout α réel. Ainsi pour $\alpha \in [-1; 1]$, g_α est continue sur $\mathbb{R}_+$ et elle y est positive (car $\sin$ prend ses valeurs dans $[-1; 1]$ donc $1 + \alpha \sin$ est à valeurs positives et f aussi).

• Pour tout n de $\mathbb{N}$, par linéarité, on a

$$(*) m_n(f) + \alpha I_n = \int_0^{+\infty} (x^n f(x) + \alpha x^n f(x) \sin(2\pi \ln(x)))dx = \int_0^{+\infty} x^n g_\alpha(x)dx.$$

Comme la fonction $x \mapsto x^n g_\alpha(x)$ est positive et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^n g_\alpha(x)dx$ converge, on en déduit que $x \mapsto x^n g_\alpha(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ sur ce qui assure l'existence du moment d'ordre n de g_α et via Q7 (*) s'écrit $m_n(f) = m_n(g_\alpha)$.

En particulier pour $n = 0$, on obtient que pour tout $\alpha \in [-1; 1]$, g_α est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'intégrale égale à $m_0(g_\alpha) = m_0(f) = 1$ (car f est une densité sur $[0, +\infty[$).

Ainsi, pour tout $\alpha \in [-1; 1]$, g_α est une densité sur $\mathbb{R}_+$, distincte de f pour $\alpha \neq 0$ (car par exemple, pour $x = e^{1/4}$, $\alpha f(x) \sin(2\pi \ln(x)) = \alpha f(x) \neq 0$) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n(f) = m_n(g_\alpha)$.

Ainsi, pour tout α de $[-1, 1] \setminus \{0\}$, f et g_α sont deux densités sur $[0, +\infty[$, distinctes et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n(f) = m_n(g_\alpha)$ donc $I = [-1, 0[$ ou $I =]0, 1]$ conviennent par exemple.

9. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, comme $x \mapsto x^n f(x)$ et $x \mapsto x^n g(x)$ sont continues sur le segment $[0; 1]$ (par produit), par linéarité de l'intégrale, on a $\int_0^1 (f(x) - g(x))x^n dx = m_n(f) - m_n(g) = 0$.

Toute fonction polynomiale P s'écrit $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ avec n dans $\mathbb{N}$ et les a_k dans $\mathbb{R}$, donc par linéarité

de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))P(x)dx = \sum_{k=0}^n a_k (m_k(f) - m_k(g)) = 0$$

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto (f(x) - g(x))P_n(x)$ est continue sur le segment $[0, 1]$ (puisque les fonctions f , g et P_n le sont).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0, 1]$. On a :

$$\begin{aligned} \left| f_n(x) - (f(x) - g(x))^2 \right| &= |(f(x) - g(x))(P_n(x) - f(x) + g(x))| \\ &\leq (|f(x)| + |g(x)|) |P_n(x) - f(x) + g(x)| \\ &\leq (\|f\|_\infty^{[0,1]} + \|g\|_\infty^{[0,1]}) \|P_n - (f - g)\|_\infty^{[0,1]} \end{aligned}$$

les fonctions f , g et $P_n - (f - g)$ étant continues sur le segment $[0, 1]$ donc bornées. On en déduit que :

$$0 \leq \|f_n - (f - g)^2\|_\infty^{[0,1]} \leq (\|f\|_\infty^{[0,1]} + \|g\|_\infty^{[0,1]}) \|P_n - (f - g)\|_\infty^{[0,1]}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n - (f - g)\|_\infty^{[0,1]} = 0$, on en déduit par le théorème de limite par encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - (f - g)^2\|_\infty^{[0,1]} = 0.$$

Ainsi, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $(f - g)^2$ sur $[0, 1]$.

On peut donc inverser les symboles limites et intégrale c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

C'est exactement dire que

la suite $\left(\int_0^1 (f(x) - g(x))P_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx$.

11. Pour tout entier naturel n , la question Q9 assure $\int_0^1 (f(x) - g(x))P_n(x) dx = 0$. Donc la suite $\left(\int_0^1 (f(x) - g(x))P_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et par unicité de la limite, via Q10, on a :

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx = 0.$$

Or, la fonction $(f - g)^2$ est continue et positive sur $[0, 1]$, donc le cas de nullité de l'intégrale assure que $(f - g)^2$ est la fonction nulle sur $[0, 1]$. Ainsi, $(f(x) - g(x))^2 = 0$ pour tout x de $[0, 1]$ donc $f(x) - g(x) = 0$ i.e. $f(x) = g(x)$ pour tout x de $[0, 1]$.

Ainsi $f = g$ sur $[0, 1]$.

EXERCICE 3 : (extrait ENS PC 2018)

1. Montrons-le par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 0$, l'intégrale étudiée est l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$. On a pour tout $y \in [0, +\infty[$:

$$\int_0^y e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^y = -e^{-y} + 1 \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 1 \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-y} dy$ converge et a pour valeur $1 = 0!$.

N.B. : On pouvait aussi remarquer qu'il s'agit d'une intégrale de référence du type $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ avec $\alpha = 1 > 0$ donc convergente.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ converge et a pour valeur $n!$.

Les fonctions $u : x \mapsto x^{n+1}$ et $v : x \mapsto -e^{-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et elles ont pour dérivées respectives $u' : x \mapsto (n+1)x^n$ et $v' : x \mapsto e^{-x}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^{n+1}e^{-x}) = 0$ par croissances comparées (on a bien une limite finie).

Par le théorème d'intégration par parties, on en déduit que les intégrales $\int_0^{+\infty} u(x)v'(x)dx = \int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}dx$ et $\int_0^{+\infty} u'(x)v(x)dx = \int_0^{+\infty} (-(n+1)x^n e^{-x})dx$ sont de même nature, cette dernière étant de même nature que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$ (car $-(n+1)$ est une constante multiplicative non nulle) donc convergente par hypothèse de récurrence.

Toujours par le théorème d'intégration par parties (et par linéarité), on a alors :

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}dx = [-x^{n+1}e^{-x}]_0^{+\infty} + (n+1) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^{n+1}e^{-x}) + 0^{n+1}e^{-0} + (n+1)n! = (n+1)! \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

On a ainsi prouvé que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$ converge et a pour valeur $n!$.

2. Posons le changement de variable affine $x = n + t\sqrt{n} \Leftrightarrow t = \frac{x-n}{\sqrt{n}}$. On a $dx = \sqrt{n}dt$.

Comme $\sqrt{n} > 0$, ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant, et induit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $] -\sqrt{n}, +\infty[$. De plus, l'intégrale de départ converge donc l'intégrale obtenue par le changement de variable également et elles ont la même valeur :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} (n + t\sqrt{n})^n e^{-n-t\sqrt{n}} \sqrt{n} dt = \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} n^n \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-n} e^{-t\sqrt{n}} \sqrt{n} dt \\ &= \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-t\sqrt{n}} dt. \end{aligned}$$

3.(a) Soit $(t, x) \in U$ avec $x \leq 0$.

On a $t > 0$ et $x \leq 0$ donc $\frac{x}{t} \leq 0$ et $x > -t$ donc $\frac{x}{t} > -1$. Ainsi, $\frac{x}{t} \in]-1, 1[$.

Par le développement en série entière de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ et en constatant que $x = -|x|$, on obtient alors :

$$\ln\left(1 + \frac{x}{t}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{x}{t}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n |x|^n}{nt^n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{nt^n} = - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|x|^n}{nt^n} - \frac{|x|}{t} = - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|x|^n}{nt^n} + \frac{x}{t}.$$

On en déduit que :

$$f(x, t) + \frac{x^2}{2} = -t^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|x|^n}{nt^n} + xt - xt + \frac{x^2}{2} = -t^2 \left(\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{|x|^n}{nt^n} + \frac{x^2}{2t^2} \right) + \frac{x^2}{2} = -t^2 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{|x|^n}{nt^n}.$$

La somme étant positive en tant que somme de termes positifs, on en déduit que $f(x, t) + \frac{x^2}{2} \leq 0$.

Ainsi :

pour tout $(t, x) \in U$, on a : $x \leq 0 \Rightarrow f(t, x) \leq -\frac{x^2}{2}$.

3.(b) Soit $x > 0$ fixé. Posons $g_x : t \mapsto f(x, t)$.

g_x est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles et, pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} g'_x(t) &= 2t \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right) + t^2 \frac{-\frac{x}{t^2}}{1 + \frac{x}{t}} - x = t \left[2 \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right) - \frac{\frac{x}{t}}{1 + \frac{x}{t}} - \frac{x}{t} \right] \\ &= t \left[2 \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right) - 1 + \frac{1}{1 + \frac{x}{t}} - \frac{x}{t} \right] = tF\left(\frac{x}{t}\right) \end{aligned}$$

où $F : z \in [0, +\infty[\mapsto 2\ln(1+z) - 1 + \frac{1}{1+z} - z$.

F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $z \geq 0$,

$$F'(z) = \frac{2}{1+z} - 1 - \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{2(1+z) - (1+z)^2 - 1}{(1+z)^2} = -\frac{z^2}{(1+z)^2}.$$

La dérivée étant négative sur $[0, +\infty[$, la fonction F est décroissante sur $[0, +\infty[$ donc elle admet un maximum en 0 qui vaut $F(0) = 0$.

On en déduit que pour tout $z \in [0, +\infty[$, $F(z) \leq 0$.

Pour tout $t > 0$, on a $\frac{x}{t} \geq 0$ donc $g'_x(t) = tF\left(\frac{x}{t}\right) \leq 0$.

On en déduit que g_x est décroissante sur $]0, +\infty[$ donc

$$\forall t \geq 1, g_x(t) \leq g_x(1) \quad \text{ie} \quad f(t, x) \leq f(1, x).$$

Pour $x > 0$, on a : $\forall t \geq 1, \quad f(t, x) \leq f(1, x).$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\sqrt{n} \\ \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}} & \text{si } x > -\sqrt{n} \end{cases}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x > -\sqrt{N}$ et, pour tout $n \geq N$, $x > -\sqrt{n}$, donc

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}x\right) = \exp\left(n\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \sqrt{n}x\right) \\ &= \exp\left(-\frac{x^2}{2} + o(1)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \end{aligned}$$

donc (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ qui est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$.

- Soit $n \geq 1$.

Pour tout $x \leq -\sqrt{n}$, $|f_n(x)| = 0 \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

Pour tout $x \in]-\sqrt{n}, +\infty[$:

$$|f_n(x)| = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) - x\sqrt{n}\right) = \exp(f(\sqrt{n}, x)).$$

Si $-\sqrt{n} < x \leq 0$, $|f_n(x)| \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ (d'après la question 3.(a) avec $(\sqrt{n}, x) \in U$).

Si $x > 0$, comme $\sqrt{n} \geq 1$, $|f_n(x)| \leq \exp(f(1, x)) = (1+x)e^{-x} = e^{-x} + xe^{-x}$ (d'après la question 3.(b).)
Donc finalement :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} + xe^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

La fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, positive et les intégrales $\int_{-\infty}^0 \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$ et $\int_0^{+\infty} \varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} (e^{-x} + xe^{-x})dx$ convergent.

En effet, on a $\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (croissances comparées), pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $\frac{1}{x^2} \geq 0$ et l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$ converge (on pose $u = -x$ pour se ramener à l'intégrale de Riemann en $+\infty$) et d'après 1. (avec $n = 0$ et $n = 1$), les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ et $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ convergent donc $\int_0^{+\infty} (e^{-x} + x e^{-x}) dx$ converge par linéarité.

• D'où par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi} \neq 0,$$

donc

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$, on obtient la formule de Stirling :

$$\boxed{n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.}$$