
DM10 (ESPACES EUCLIDIENS)
À rendre le vendredi 14 février

Sujet 1 (niveau CCINP)

Le sujet 1 est constitué de deux exercices totalement indépendants.

Exercice 1 : Étude d'un endomorphisme autoadjoint

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.

Soit $u \in E$, u non nul. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

On considère l'application f définie par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = x - \lambda \langle x, u \rangle u.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E .
2. Montrer que 1 est valeur propre de f puis donner les éléments propres de f .
3. Déterminer les scalaires λ pour lesquels f est une isométrie vectorielle.
Reconnaître f dans ce cas.

Exercice 2 : Racine cubique d'une matrice carrée

Présentation générale

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine cubique s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^3$.

Dans ce cas, on dit que B est une racine cubique de A .

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Nous allons déterminer toutes les racines cubiques de la matrice A .

1. Justifier qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qu'il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement, telle que $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

2. Montrer qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une racine cubique de A si et seulement si $\Delta = P^{-1}BP$ est une racine cubique de D .
3. Soit $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une racine cubique de D . Montrer que les matrices D et Δ commutent, puis en déduire que la matrice Δ est diagonale.
4. Déterminer l'ensemble des racines cubiques de D , puis l'ensemble des racines cubiques de A .
On pourra se contenter de décrire ce dernier ensemble en fonction de P et de Δ .

Partie II - Dans un plan euclidien

Dans cette partie, on considère un plan euclidien orienté E muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}$. On fixe également un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et on note :

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

5. Quelle est la nature de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M ?
6. En déduire une racine cubique de la matrice M .
7. Soit $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale de déterminant -1.
Montrer que N admet une racine cubique.

Partie III - Racines cubiques et diagonalisation

Dans toute cette partie, on considère une matrice diagonalisable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de la matrice A .

III. 1 - Existence d'une racine cubique polynômiale

8. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une racine cubique de la matrice :

$$H_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

9. Dédurre de la question précédente que la matrice A admet une racine cubique. On pourra remarquer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs où les blocs sur la diagonale sont de la forme $H_p(\lambda)$ avec $(p, \lambda) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.

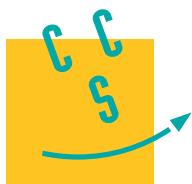
III. 2 - Réduction d'une racine cubique

Dans cette sous-partie, on suppose de plus que la matrice A est inversible et on considère le polynôme :

$$Q(X) = \prod_{k=1}^d (X^3 - \lambda_k).$$

10. Montrer que les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont non nuls.
11. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ que l'on écrit sous la forme $\lambda = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $z^3 = \lambda$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet exactement trois solutions.
12. En déduire que le polynôme Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
13. Dédurre des questions précédentes que si B est une racine cubique de A , alors la matrice B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Sujet 2 : Étude de certaines matrices symplectiques (niveau Centrale-Mines)



Étude de certaines matrices symplectiques

L'objet du problème est de définir et étudier la notion de matrice symplectique, et d'établir des résultats de réduction dans certains cas particuliers.

Vocabulaire et notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul et J_n la matrice carrée de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par blocs par

$$J_n = \begin{pmatrix} 0_{n,n} & I_n \\ -I_n & 0_{n,n} \end{pmatrix}$$

où $0_{n,n}$ est la matrice nulle à n lignes et n colonnes et I_n est la matrice identité de même taille.

Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, la matrice transposée de toute matrice M de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est notée $M^\top$.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est *symplectique* si et seulement si $M^\top J_n M = J_n$. On désigne par $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques de taille $2n \times 2n$.

On note $\mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle *forme bilinéaire* sur E toute application ψ définie sur $E \times E$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $Y \in E$,

$$X \mapsto \psi(X, Y) \quad \text{et} \quad X \mapsto \psi(Y, X)$$

soient toutes les deux linéaires sur E .

Soit ψ une forme bilinéaire ; ψ est dite *alternée* si et seulement si, pour tout $X \in E$, $\psi(X, X) = 0$; ψ est dite *antisymétrique* si et seulement si, pour tout $(X, Y) \in E^2$, $\psi(X, Y) = -\psi(Y, X)$.

Si i et j sont deux entiers naturels, on note $\delta_{i,j}$ le nombre qui vaut 1 si $i = j$ et qui vaut 0 sinon.

On note e_i la matrice colonne élémentaire dont le seul coefficient non nul vaut 1 et est placé sur la ligne numéro i .

On munit $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$. En identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a, pour tous X et Y dans $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle X, Y \rangle = X^\top Y \quad \text{et} \quad \|X\|^2 = X^\top X.$$

Si $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $X^\perp$ désigne l'orthogonal de X , c'est-à-dire l'ensemble des éléments Y de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\langle X, Y \rangle = 0$. Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $F^\perp$ désignera l'orthogonal de F , c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ qui sont orthogonaux à tous les éléments de F .

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, on notera $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de A .

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et λ est une de ses valeurs propres, on notera E_λ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ .

Soit E un espace vectoriel et $X_1, \dots, X_p$ des vecteurs de E . On note $\text{Vect}(X_1, \dots, X_p)$ l'espace vectoriel engendré par $X_1, \dots, X_p$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et F une partie de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. On dit que F est *stable* par A si et seulement si, pour tout X dans F , AX est un élément de F .

I Cas des matrices de taille 2×2

Q 1. Dans cette question uniquement, n est un entier naturel non nul quelconque. Déterminer J_n^2 et montrer que $J_n \in \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, $n = 1$.

Q 2. Montrer qu'une matrice de taille 2×2 est symplectique si et seulement si son déterminant est égal à 1.

Q 3. Soit M une matrice orthogonale de taille 2×2 . On note $M_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ les deux colonnes de M . Montrer l'équivalence

$$M \text{ est symplectique} \iff M_2 = -J_1 M_1.$$

Q 4. Soit $X_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de norme 1. Montrer que la matrice carrée constituée des colonnes X_1 et $-J_1 X_1$ est à la fois orthogonale et symplectique.

Q 5. Soit M une matrice de taille 2×2 symétrique et symplectique. Montrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont inverses l'une de l'autre. Montrer qu'il existe une matrice P à la fois orthogonale et symplectique telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

Q 6. Déterminer les matrices de taille 2×2 à la fois antisymétriques et symplectiques et montrer qu'elles ne sont pas diagonalisables dans $\mathbb{R}$.

II Cas des matrices symplectiques et orthogonales

Soit K une matrice antisymétrique et φ l'application de $(\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}))^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}))^2, \quad \varphi(X, Y) = X^\top KY.$$

(On identifie de nouveau $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$.)

Q 7. Montrer que φ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.

Q 8. En calculant de deux manières $\varphi(X, X)^\top$, montrer que φ est alternée. Montrer de même que φ est antisymétrique.

Dans toute la suite du sujet, $K = J_n$.

Q 9. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, montrer l'égalité

$$\varphi(X, Y) = \sum_{k=1}^n (x_k y_{k+n} - x_{k+n} y_k).$$

Q 10. Montrer que pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, 2n\}^2$, $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{i+n, j} - \delta_{i, j+n}$ (on pourra commencer par le cas où $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ puis généraliser).

Q 11. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $J_n X \in X^\perp$ et calculer $\varphi(J_n X, X)$.

Q 12. Si $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, on note Y^{J_n} l'ensemble des vecteurs Z de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\varphi(Y, Z) = 0$. Montrer que $X^{J_n} = (J_n X)^\perp$.

Q 13. Soit P une matrice symplectique et orthogonale dont les colonnes sont notées $X_1, \dots, X_{2n}$. Montrer que, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, 2n\}^2$,

$$\begin{cases} \|X_i\| = 1 \\ i \neq j \implies X_i \perp X_j \\ \varphi(X_i, X_j) = \delta_{i+n, j} - \delta_{i, j+n} \end{cases}$$

Q 14. Sous les mêmes hypothèses, montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $X_i^{J_n} = X_{i+n}^\perp$.

Q 15. Sous les mêmes hypothèses, montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $X_{i+n} = -J_n X_i$.

III Quelques généralités sur les matrices symplectiques

Q 16. Montrer que le déterminant d'une matrice symplectique vaut soit 1 soit -1 .

Q 17. Montrer que l'inverse d'une matrice symplectique est une matrice symplectique.

Q 18. Montrer que le produit de deux matrices symplectiques est une matrice symplectique. L'ensemble $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?

IV Réduction des matrices symétriques et symplectiques

Le but de cette partie est de montrer que, si $M \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $P^\top MP$ est diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_{2n}$ avec pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $d_{k+n} = 1/d_k$.

IV.A – Propriété

Soit $M \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

Q 19. Montrer que si λ est valeur propre de M , $1/\lambda$ est également valeur propre de M . Donner un vecteur propre associé.

Q 20. Soit $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(M)$ et $p = \dim E_\lambda$. Soit $(X_1, \dots, X_p)$ une base de E_λ . Montrer que $(J_n X_1, \dots, J_n X_p)$ est une base de $E_{1/\lambda}$ et que

$$\dim(E_\lambda) = \dim(E_{1/\lambda}).$$

Q 21. Soient $Y_1, \dots, Y_p$ des vecteurs de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Soit $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'implication

$$Y \in (\mathrm{Vect}(Y_1, \dots, Y_p, J_n Y_1, \dots, J_n Y_p))^\perp \implies J_n Y \in (\mathrm{Vect}(Y_1, \dots, Y_p, Y, J_n Y_1, \dots, J_n Y_p))^\perp.$$

Q 22. Dans cette question $\lambda = 1$. Montrer que E_1 est de dimension paire et qu'il existe une base de E_1 orthonormée de la forme $(X_1, \dots, X_p, J_n X_1, \dots, J_n X_p)$ où $2p$ est la dimension de E_1 .

Q 23. Qu'en est-il pour E_{-1} ?

Q 24. Démontrer la propriété annoncée au début de la partie.

IV.B – Mise en application sur un exemple

Dans la fin de cette partie, on note A la matrice

$$A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Q 25. Montrer que $A \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$.

Q 26. Construire une matrice orthogonale et symplectique P telle que $P^\top AP$ soit diagonale.

V Étude du cas des matrices antisymétriques

V.A – Un peu de théorie

Soit $M \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. Soit m l'application linéaire canoniquement associée à M .

Q 27. Montrer l'égalité $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$.

Q 28. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $P^\top M^2 P$ soit diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_{2n}$ avec pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $d_{k+n} = 1/d_k$.

Dans toute la suite de cette sous-partie, X désigne un vecteur propre de M^2 de norme 1 associé à une certaine valeur propre λ .

Q 29. Montrer que MX , $J_n X$ et $J_n MX$ sont des vecteurs propres de M^2 et donner les valeurs propres associées à chacun de ces vecteurs.

Q 30. Dans cette question et dans la suite, on note $F = \mathrm{Vect}(X, MX, J_n X, J_n MX)$. Montrer que F est stable par M et par J_n .

Q 31. Montrer que toutes les valeurs propres de M^2 sont strictement négatives.

Q 32. Justifier que si $\lambda \neq -1$, F est un espace vectoriel de dimension 4. Montrer que, dans ce cas,

$$\left(X, \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}} MX, -J_n X, \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} J_n MX \right)$$

est une base orthonormée de F . Donner alors la matrice de l'application m_F induite par m sur F dans la base obtenue.

Q 33. Montrer que $F^\perp$ est stable par M et par J_n .

Q 34. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul q et des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, notés $F_1, \dots, F_q$ tels que

- (a) $F_1 \oplus \dots \oplus F_q = \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$;
- (b) $\forall i \in \{1, \dots, q\}$, F_i est stable par M et par J_n ;
- (c) $\forall i \in \{1, \dots, q\}$, $F_i^\perp$ est stable par M et par J_n ;
- (d) $\forall (i, j) \in \{1, \dots, q\}^2$, $i \neq j \implies \forall (Y, Z) \in F_i \times F_j$, $\langle Y, Z \rangle = 0 = \varphi(Y, Z)$;
- (e) $\forall i \in \{1, \dots, q\}$, $\dim F_i \in \{2, 4\}$;
- (f) $\forall i \in \{1, \dots, q\}$, la matrice de l'application m_{F_i} induite par m sur F_i dans une certaine base est de la forme

$$J_1 \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \sqrt{-\lambda} J_1 & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} J_1 \end{pmatrix}.$$

V.B – Mise en application

Dans la fin de cette partie, on note B la matrice

$$B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q 35. Calculer $B^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Q 36. Déterminer un réel a et une matrice P tels que

$$P \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R}) \cap \text{Sp}_4(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad P^\top B P = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & -1/a & 0 \end{pmatrix}.$$

• • • FIN • • •

Sujet 3 : Théorème de Courant-Fischer (niveau X-ENS)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Toute affirmation doit être clairement et complètement justifiée.

★ ★ ★

Dans ce problème, n est un entier strictement positif. L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne associée $\| \cdot \|$; on l'identifie à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes à n coordonnées. Ainsi pour deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = {}^t x y$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ composé des matrices réelles symétriques. On notera ${}^t M$ (ou M^T) la matrice transposée de M et I_n la matrice identité. Par abus de notation, on identifiera $\langle x, y \rangle$ au vecteur à une ligne et une colonne ${}^t x y$.

Les coordonnées d'un n -uplet m de réels (considéré comme vecteur ligne) seront notées $m_1, \dots, m_n$.

Si m est un n -uplet de réels, $m^\downarrow$ est le n -uplet obtenu à partir de m par permutation de ses coordonnées de sorte que $m_1^\downarrow \geq m_2^\downarrow \geq \dots \geq m_n^\downarrow$. Autrement dit, il s'agit du n -uplet obtenu en ordonnant dans l'ordre décroissant les coordonnées de m . Par exemple, si $m = (3, 2, -1, 6, 2, 9)$, $m^\downarrow = (9, 6, 3, 2, 2, -1)$.

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera appelé, comme à l'habitude, spectre de M . On notera $s^\downarrow$ l'application de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à une matrice M symétrique associe le n -uplet (appelé *spectre ordonné*) dont les coordonnées sont les éléments ordonnés dans l'ordre décroissant du spectre de M (répétés autant de fois que leur ordre de multiplicité). Ainsi, par exemple, si le spectre de la matrice $M \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R})$ vaut $\{-1, 3, 3, 7\}$, on a $s^\downarrow(M) = (7, 3, 3, -1)$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\|M\| = \sup_{\|x\|=1} \|Mx\|.$$

On admet qu'il s'agit d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Première partie

1a. Rappeler pourquoi $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel et quelle est sa dimension. Pourquoi l'application $s^\downarrow$ est-elle bien définie sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?

1b. L'application $s^\downarrow$ est-elle linéaire ? Justifier votre réponse.

1c. Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, exprimer $s^\downarrow(-M)$ en fonction des coordonnées $(m_1, \dots, m_n)$ de $s^\downarrow(M)$.

1d. Soit $M = \begin{pmatrix} \lambda & h \\ h & \mu \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Calculer $s^\downarrow(M)$.

2a. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $m = s^\downarrow(M)$ son spectre ordonné. Montrer qu'il existe une base ortho-normée $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$M = \sum_{i=1}^n m_i v_i {}^t v_i.$$

Une telle décomposition de M sera appelée dans la suite *résolution spectrale* de M .

2b. Calculer

$$\sup_{\|x\|=1} \langle x, Mx \rangle$$

en fonction des coordonnées de m . Cette borne supérieure est-elle atteinte ? (On pourra décomposer x et Mx sur la base orthonormée $(v_1, \dots, v_n)$ de la question **2a**).

2c. Les notations sont celles de la question **2a**. Soit j un entier, $1 \leq j \leq n$. On note $\mathcal{V}_j$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(v_1, \dots, v_j)$, et $\mathcal{W}_j$ celui engendré par $(v_j, v_{j+1}, \dots, v_n)$. Montrer les égalités

$$\inf_{x \in \mathcal{V}_j, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle = \sup_{x \in \mathcal{W}_j, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle = m_j$$

3a. Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{V}) > n.$$

Montrer que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ ne se réduit pas à $\{0\}$.

3b. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $m = s^\downarrow(M)$. Soit j un entier, $1 \leq j \leq n$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension j . Montrer que

$$\inf_{x \in \mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle \leq m_j.$$

(On pourra utiliser les questions **2c** et **3a**, en choisissant $\mathcal{U} = \mathcal{W}_j$.)

3c. En reprenant les notations de la question **3b.**, en déduire que :

$$\sup_{\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n, \dim \mathcal{V} = j} \inf_{x \in \mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle = m_j.$$

Cette borne supérieure est-elle atteinte ?

4. Soient m et l deux n -uplets de réels. On note

$$l \leq m \quad \text{si et seulement si, pour tout entier } j, 1 \leq j \leq n, l_j \leq m_j.$$

4a. Soient $L, M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $(0, \dots, 0) \leq s^\downarrow(M - L)$. Montrer que $s^\downarrow(L) \leq s^\downarrow(M)$.

4b. Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $(0, \dots, 0) \leq s^\downarrow(\|M\|I_n - M)$.

4c. Soit $L, M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $m = s^\downarrow(M)$ et $\ell = s^\downarrow(L)$. Montrer que

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\ell_j - m_j| \leq \|L - M\|.$$

4d. Conclure que la fonction $s^\downarrow : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.

Pour les 3/2, définition de la continuité :

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $f : E \rightarrow F$.

On dit que f est *continue au point* $a \in E$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in E$ vérifie $\|x - a\|_E \leq \eta$ alors $\|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$.

Lorsque E et F sont de dimension finie, le choix des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ n'a pas d'importance.

On dit que f est *continue sur* E lorsque f est continue en tout point de E .

5. Question pour les 5/2 uniquement : On note $\mathcal{S}_n^\dagger(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques $n \times n$ dont toutes les valeurs propres sont simples.

5a. Soit $M \in \mathcal{S}_n^\dagger(\mathbb{R})$. Déterminer un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ centrée en M et de rayon r soit incluse dans $\mathcal{S}_n^\dagger(\mathbb{R})$.

En déduire que $\mathcal{S}_n^\dagger(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

5b. Montrer que la première composante $s_1^\downarrow$ de $s^\downarrow$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}_2^\dagger(\mathbb{R})$ mais pas sur $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. (On pourra utiliser la question **1d**.)

Deuxième partie

Dans toute cette partie, on considère deux matrices symétriques réelles $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et leur somme $C = A + B$. On note $a = s^\downarrow(A)$, $b = s^\downarrow(B)$ et $c = s^\downarrow(C)$.

6a. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n c_i = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

6b. Montrer que $a_1 + b_1 \geq c_1$.

6c. Montrer que $a_n + b_n \leq c_n$.

7a. Soient $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} > 2n$$

Montrer que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ ne se réduit pas à $\{0\}$.

7b. En utilisant des résolutions spectrales de A, B et C , montrer que si les entiers strictement positifs j et k vérifient $j + k \leq n + 1$, on a

$$c_{j+k-1} \leq a_j + b_k.$$

En déduire pour tout entier j , $1 \leq j \leq n$,

$$a_j + b_n \leq c_j.$$

8. On note a_{ii} pour $1 \leq i \leq n$ les éléments diagonaux de A .

8a. Démontrer que $a_{11} \leq a_1$.

8b. Soient j et k des entiers positifs tels que $1 \leq j < k$ et $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k$ des réels. On définit $\mathcal{D}_{j,k} = \{(t_1, \dots, t_k) \in [0, 1]^k \mid t_1 + \dots + t_k = j\}$ et f la fonction de $\mathcal{D}_{j,k}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(t_1, \dots, t_k) = \sum_{i=1}^k s_i t_i.$$

Démontrer que pour tout $(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{D}_{j,k}$,

$$\sum_{i=1}^j s_i - f(t_1, \dots, t_k) \geq \sum_{i=1}^j (s_i - s_j)(1 - t_i).$$

En déduire que

$$\sup_{\mathcal{D}_{j,k}} f = \sum_{i=1}^j s_i.$$

8c. Montrer que, plus généralement qu'en **8a**, on a pour tout entier $1 \leq j \leq n$

$$\sum_{i=1}^j a_{ii} \leq \sum_{i=1}^j a_i.$$

8d. En déduire que pour tout entier $1 \leq j \leq n$

$$\sum_{i=1}^j a_i = \sup_{(x_1, \dots, x_j) \in \mathcal{R}_j} \sum_{i=1}^j \langle x_i, Ax_i \rangle,$$

où $\mathcal{R}_j$ est l'ensemble des familles orthonormales de cardinal j dans $\mathbb{R}^n$.

8c. En conclure que l'on a pour tout entier $1 \leq j \leq n$

$$\sum_{i=1}^j c_i \leq \sum_{i=1}^j a_i + \sum_{i=1}^j b_i.$$

Troisième partie

Dans toute cette partie, on étudie le cas $n = 2$. Pour deux réels u et v tels que $u \geq v$, on note :

$$S(u, v) = \{M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \mid s^\downarrow(M) = \{u, v\}\}.$$

On fixe $a_1 \geq a_2$ et $b_1 \geq b_2$, quatre réels vérifiant la relation

$$a_1 - a_2 \geq b_1 - b_2.$$

On cherche à identifier l'ensemble

$$\Sigma = \{s^\downarrow(A + B) \mid A \in S(a_1, a_2), B \in S(b_1, b_2)\},$$

autrement dit l'ensemble des spectres possibles de somme de deux matrices symétriques réelles de spectres respectifs donnés.

9. Montrer que Σ est inclus dans un segment de droite L de longueur $\sqrt{2}(b_1 - b_2)$, et dont on précisera les extrémités. On pourra étudier d'abord le cas où A et B sont diagonales.

10a. Montrer que

$$\Sigma = \left\{s^\downarrow(A + B) \mid A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, B \in S(b_1, b_2)\right\}.$$

10b. *Question pour les 5/2 uniquement :* Déterminer une fonction continue définie sur $[-\pi, \pi]$ dont l'image vaut $S(b_1, b_2)$.

10c. *Question pour les 5/2 uniquement :* Montrer que $\Sigma = L$.

* *

*