

Algèbre Chapitre 9 : arithmétique et dénombrement

Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Soit E un ensemble fini. Soient $n \in \mathbb{N}$ et A_1, A_2, \dots, A_n n sous ensemble de E . Montrez que $\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_{k=1}^n \text{card}(A_k)$

Exercice 2 :

On dispose d'un jeu de 32 cartes et on effectue deux tirages successifs, sans remise. Combien de possibilités a-t-on pour obtenir deux rois ?

Exercice 3 :

La combinaison d'un coffre est constituée de 4 chiffres entre 0 et 9.

1. Combien de codes sont possibles ?
2. Combien de codes commençant par 0, 1, 2 ou 3 ?
3. Combien de codes où tous les chiffres sont différents ?
4. Combien de codes où seuls deux chiffres se répètent ?
5. Combien de codes où les chiffres sont par ordre strictement croissant (par exemple 0469 est un des codes possibles) ?

Exercice 4 :

En France, depuis 2009, les plaques d'immatriculation ont pour format AA-111-AA (deux lettres, 3 chiffres, deux lettres).

1. Combien y a-t-il de plaques possibles ?
2. Combien de plaques sont symétriques (ie de la forme AB-212-BA) ?
3. Combien de plaques ont tous des caractères différents ?
4. Combien de plaques ont au moins un caractère qui se répète ?
5. Combien de plaques ont leur chiffre dans un ordre strictement croissant.

Exercice 5 :

On souhaite ranger sur une étagère 3 livres de chimie, 6 livres de physique et 4 livres de maths. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. Sans imposer de contrainte d'aucune sorte...
2. Si les livres doivent être groupés par matière.
3. Si au moins les livres de maths doivent être groupés.

Exercice 6 :

On souhaite placer 4 personnes autour d'une table carrée. Quel est le nombre de dispositions possibles, sachant que seule la position relative des uns par rapport aux autres compte ?

Exercice 7 :

Quatre joueurs se partagent 32 cartes en vue d'une partie de belote.

1. Combien de main de 8 cartes un joueur peut-il recevoir ?
2. Combien de début de partie peut-on avoir entre les 4 joueurs ?

Exercice 8 :

Combien d'anagrammes (sans forcément que le mot ait un sens) peut-on faire avec les mots suivants :

1. Sioux
2. Apache
3. Chiracahuas

Exercice 9 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Combien y a-t-il de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, 2 \rrbracket$?
2. Combien y a-t-il de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$?
3. Combien y a-t-il de surjections de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$?
4. Combien y a-t-il de surjections de $\llbracket 1, n+2 \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$?

Exercice 10 :

Soient p et q deux entiers naturels non nuls et soit $n \leq p+q$. On considère une urne contenant $p+q$ jetons : p jetons noirs et q jetons blancs.

1. On tire simultanément au hasard n jetons dans l'urne. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer le nombre de façon d'obtenir exactement k jetons noirs (et donc $n-k$ jetons blancs).
2. Démontrer la formule de Vandermonde

$$\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$$