Algèbre Chapitre 8 : Matrices et systèmes
Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Déterminez lorsqu'il existe l'inverse des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & i & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

Déterminer en fonction de $m \in \mathbb{R}$ si les matrices suivantes sont inversibles :

$$A = \begin{pmatrix} m & 1-m & 1+m \\ 0 & 1-m & m \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1-m \\ 1-m & 4m \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Exercice 3 :

Soit $n \geqslant 2$ et A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{ Montrez que } A \text{ est inversible et calculer } A^{-1}$$

Exercice 4 :

Soit A une matrice nilpotente. Montrez que A n'est pas inversible.

Montrez que $I - A$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 5 : diagonalisation

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Montrez que A est inversible et calculer son inverse.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminez les valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
3. (a) Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vérifiez que U et V sont des solutions à l'équation $AX = \lambda X$ pour deux valeurs distinctes de λ que vous préciserez
   (b) On pose P la matrice dont les colonnes sont U et V , c'est à dire
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$
   Montrez que P est inversible et calculez $D = P^{-1}AP$.
   (c) Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (d) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
4. Déterminez l'expression explicite des suites (u_n) et (v_n) définie par

$$u_0 = 1 \quad v_0 = 2 \quad \begin{cases} u_{n+1} & = -u_n - 2v_n \\ v_{n+1} & = 3u_n + 4v_n \end{cases}$$