

Limites de fonctions - continuité

Dans tout le chapitre, f désigne une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur un ensemble D_f qui est un intervalle ou une union d'intervalles.

On considère un réel a tel que $a \in D_f$ ou bien a est "au bord" de D_f . Ainsi, a n'est pas forcément dans l'ensemble de définition de la fonction : par exemple si $D_f = \mathbb{R}^*$, a peut être égal à 0.

I Limite d'une fonction

1) Notion de voisinage

a) Voisinage d'un point



Définition : voisinage d'un point

On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage d'un point** a si il existe un intervalle ouvert contenant a tel que la propriété est vraie sur cet intervalle sauf éventuellement au point a .

Exemple :

La fonction $\cos$ est positive au voisinage de 0 :

Remarque :

Lorsque l'on parle de fonction, l'expression "au voisinage de" sous entend que l'on reste dans l'intervalle de définition de la fonction.

Ainsi, $x \mapsto \ln(x)$ est négative au voisinage de 0, bien qu'on ne puisse pas faire d'intervalle autour de 0 sur lequel $\ln$ est défini.

b) Voisinage de l'infini



Définition : voisinage de l'infini

On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage de** $+\infty$ (resp. $-\infty$) si il existe un intervalle avec borne $+\infty$ (resp $-\infty$) tel que la propriété est vraie sur l'intervalle.

Exemple :

$x \mapsto \ln x$ est positive au voisinage $+\infty$:

2) Limite finie

a) Limite en un point a



Définition : limite d'une fonction en un point

On dit que la fonction f **admet une limite** $\ell \in \mathbb{R}$ en un point a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, \text{ si } |x - a| \leq \eta, \text{ alors } |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$

Interprétation :

Pour tout ε , on peut toujours s'approcher assez de a (c'est le " $\exists \eta$ tel que $|x - a| \leq \alpha$ ") pour garantir que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ (i.e. $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$).

Comme pour les suites, on a le résultat suivant :



Propriété 1 : Unicité de la limite



Soient ℓ et ℓ' dans $\mathbb{R}$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell'$, alors $\ell = \ell'$.

▷ *Preuve* : La même que pour les suites, à quelques adaptations près.

◁



Propriété 2 : Limite en un point où la fonction est définie



Supposons que $a \in D_f$, c'est à dire que $f(a)$ existe.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

▷ *Preuve* :

◁

Ce résultat est ce qui entrainera la définition de fonction continue, dans la seconde partie de ce chapitre....

b) Limite à l'infini



Définition : limite d'une fonction à l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert vers $+\infty$.

On dit que f **admet une limite ℓ en $+\infty$** et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, \text{ si } x \geq M, \text{ alors } |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

De même, on écrira $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, \text{ si } x \leq M, \text{ alors } |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Remarques

- C'est plus ou moins la même définition que les suites : M joue le rôle de n_0 et on a l'idée que "pour x assez grand", on est proche de la limite.
- Graphiquement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ traduit la présence d'une asymptote horizontale, d'équation $y = \ell$

c) Précisions éventuelles

Comme pour les suites, on peut parfois, à partir d'une étude plus ou moins poussée, déterminer le signe de $f(x) - \ell$ lorsque l'on est proche de x_0 . On pourra alors noter :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^-$ si, au voisinage de x_0 , $f(x) \leq \ell$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^+$ si, au voisinage de x_0 , $f(x) \geq \ell$.

Exemples :

$$\begin{array}{lll} \text{► } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = & \text{► } \lim_{x \rightarrow 0} |x| = & \text{► } \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \end{array}$$

3) Limite à droite et limite à gauche

a) Définitions



Définition :

- On dit que f admet une **limite à droite de a** si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, \text{ si } 0 < x - a \leq \eta, \text{ alors } |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$, ou encore $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow a \\ x > a}]{} \ell$.

- On dit que f admet une **limite à gauche de a** si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, \text{ si } -\eta \leq x - a < 0, \text{ alors } |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \ell$, ou encore $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow a \\ x < a}]{} \ell$.

Remarque :

Contrairement à la limite "tout court", x ne vaut jamais ce point : notez bien que $x < a$ ou $x > a$ dans la définition !

La fonction partie entière



Rappel :

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction partie entière, notée $x \mapsto [x]$, qui à tout nombre réel x associe le plus grand entier relatif qui le précède.

Remarque :

Certaines limites à gauche n'existent pas car la fonction n'est pas définie à gauche du point considéré. Par exemple $x \mapsto \sqrt{x}$ n'a pas de limite à gauche en 0. En fait, parler de limite à gauche dans ce cas n'a même pas de sens...

b) Lien avec les limites "tout court"

Dans le cas où les limites à gauche et à droite ont un sens, on a le résultat suivant :



Proposition 1 :

Soit a tel que les limites à gauche et à droite de a ont un sens, alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \implies \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$$

▷ *Preuve* : On admet, mais intuitivement clair : la limite "tout court" prend déjà en compte les deux côtés...

◁



La réciproque est fausse : soit par exemple

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



Corolaire 1 :

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell'$ avec $\ell \neq \ell'$, alors f n'admet pas de limite en x_0 .

Exemple : Partie entière

En pratique, on utilisera beaucoup le résultat suivant, conséquence des précédents :



Proposition 2 :

Soit a tel que les limites d'une fonction f à gauche et à droite de a ont un sens.

► Si f n'est pas définie en a :

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

► Si f est définie en a :

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell \text{ et si } \ell = f(a) \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

4) Limites infinies

a) En un point fini



Définition : limite infinie en un point

On dit que f admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en un point a si et seulement si :

$$\begin{aligned} &\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, \text{ si } |x - a| \leq \eta \text{ alors } f(x) \geq A \\ &(\text{resp. } \forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, \text{ si } |x - a| \leq \eta \text{ alors } f(x) \leq A) \end{aligned}$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.
(resp. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$).

Traduction :

Au voisinage de a , $f(x)$ est plus grande (resp. plus petite) que n'importe quel nombre.

Remarque :

On définit de même les limites à droite et à gauche.

Exemple :

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} =$$

Interprétation graphique : asymptote verticale.

b) En un point infini



Définition : limite infinie à l'infini

On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B \geq 0, \forall x \in D_f, \text{ si } x \geq B, \text{ alors } f(x) \geq A$$

Et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exemples :

Remarque :

On définit de la même façon le fait que f admette pour limite $-\infty$ en $+\infty$, et toujours dans le même esprit les limites prises en $-\infty$.

c) Interprétation graphique : asymptotes et branche parabolique



Définition : asymptote oblique

On dit qu'une droite est une **asymptote oblique** au graphe de f en $+\infty$ si et seulement si il existe a et b tels que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$

Le graphe de f admet alors une droite asymptotique dont l'équation est $y = ax + b$.

Intuitivement : soit $\mathcal{C}_f$ la courbe d'une fonction f . Une droite D est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ si la "distance" de la droite D à $\mathcal{C}_f$ tend vers 0 à l'infini ($+\infty$, ou $-\infty$).



Méthode :

DÉTERMINATION D'ASYMPTOTE OBLIQUE

On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

► Si cette limite vaut $a \in \mathbb{R}^*$, on calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax$

► Si cette dernière limite vaut $b \in \mathbb{R}$, alors $y = ax + b$ est l'équation de l'asymptote oblique au graphe de f .



Définition : Branche parabolique

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f = \pm\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax - b = \pm\infty$ pour tout a et b réels, on parle de **branche parabolique** : $\mathcal{C}_f$ "part" vers l'infini sans suivre une droite en particulier, mais avec une orientation qu'on peut parfois préciser.

Exemple : branche parabolique de direction un des axes



Méthode : DÉTERMINATION DE BRANCHES PARABOLIQUES VERTICALES OU HORIZONTALES

On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

► Si cette limite est infinie : on a une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

► Si cette limite est nulle : on a une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Exemple :

Soit f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$

II Théorèmes usuels sur les limites

Remarques préliminaires

- Ce sont plus ou moins les mêmes théorèmes que pour les suites, avec des preuves très proches, que nous ne détaillerons donc pas...
- On notera $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pour dire que $a \in \mathbb{R}$ ou a est $+\infty$ ou $-\infty$.

1) Opérations sur les limites

Les mêmes que pour les suites, avec les mêmes formes indéterminées : se reporter au chapitre sur les suites convergentes pour plus de détail.

2) Relation d'ordre et limites

a) Passage à la limite dans les inégalités



Theorème 1 :

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ avec $\ell > 0$ ou $\ell = +\infty$.

Alors f est strictement positive au voisinage de a .

De même, si $\ell < 0$ ou $\ell = -\infty$, alors f est strictement négative au voisinage de a .

▷ *Preuve* : La même que pour les suites....

◁



Corolaire 2 : compatibilité avec la relation d'ordre

Soient f et g deux fonctions telles que au voisinage d'un $a \in \overline{\mathbb{R}}$ on a $f \leq g$.

Alors si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existent on a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

En particulier : si au voisinage de a , $\exists M \in \mathbb{R}, f(x) \geq M$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq M$. (resp. si $f(x) \leq M$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq M$.)

▷ *Preuve* : On applique le théorème précédent à la fonction $f - g$ et on raisonne par l'absurde (même démo que pour les suites).

◁

b) Théorème des gendarmes ou théorème de l'encadrement



Theorème 2 :

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f , g et h trois fonctions définies au voisinage de a et telles que pour tout x de ce voisinage on ait

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si f et h admettent une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a , alors g admet une limite également et on a $\lim_a f = \lim_a g = \lim_a h = \ell$.

▷ *Preuve* : La même que pour les suites.

◁

Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

c) Limite par majoration ou minoration



Theorème 3 :

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f, g deux fonctions définies au voisinage de a et telles que pour tout x de ce voisinage on ait

$$f(x) \leq g(x)$$

- si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.
- si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple :

Limite en $+\infty$ de $f(x) = x + \sin(x)$.

3) Composition et limites

a) Composée de deux fonctions



Theorème 4 : "composition de limite"

Soient f et g deux fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $c \in \overline{\mathbb{R}}$.
On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$$

▷ *Preuve* : Par exemple pour le cas $b = +\infty$, $a \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$:

◁

Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+x+1}$$

b) Limite de fonction et suite



Theorème 5 : Caractérisation séquentielle de la limite

Soit f une fonction définie sur un domaine D_f et $a \in D_f$ ou au bord de D_f .
Alors les deux phrases suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$
2. pour toute suite (u_n) à valeur dans D_f telle que $\lim u_n = a$, on a $\lim f(u_n) = b$

▷ *Preuve* :

◁

Exemple : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right).$

**Corolaire 3 :**

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \bar{\mathbb{R}}$ et soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeur dans l'ensemble de définition de f et telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$.

Si $\lim f(u_n) = \ell$ et $\lim f(v_n) = \ell'$ avec $\ell \neq \ell'$, alors la fonction n'a pas de limite en x_0 .

▷ *Preuve* :

C'est la contraposée du sens direct du théorème précédent.

◁

Exemple :

► La fonction $\cos$ n'admet pas de limite en $+\infty$:

4) Théorème de la limite monotone :

C'est l'analogue du théorème déjà connu pour les suites :

**Théorème 6 : théorème de la limite monotone**

Soit f une fonction croissante sur un intervalle $I =]a, b[$ avec $a < b$, a et b réels ou infinis. Alors :

(i) $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ existe.

Elle est finie si et seulement si f est majorée et on a alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_I f$

(ii) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe.

Elle est finie si et seulement si f est minorée et on a alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_I f$.

▷ *Preuve* : Même idée que les suites... cf le chapitre concerné.

◁

**Corolaire 4 :**

Tout fonction monotone sur un intervalle $]a, b[$ admet des limites (éventuellement infinies) en a^+ et en b^- .

▷ *Preuve* : si f est croissante c'est le théorème. Si f est décroissante alors $-f$ est croissante. On applique le théorème à $-f$ avant de revenir à f .

◁



Il s'agit bien de limites à droite ou à gauche, il est possible que la limite tout court n'existe pas !

III Méthodes élémentaires de calculs de limites

1) Limite en un point

a) Cas des fractions rationnelles



Méthode :

FORME 0/0 DANS UNE FRACTION RATIONNELLE



Si la limite en un point $a \in \mathbb{R}$ donne une forme 0/0, il suffit de factoriser le numérateur et dénominateur par $(x - a)$ et de simplifier jusqu'à lever l'indétermination.

En effet, si la forme obtenue donne $\frac{0}{0}$, c'est que a est racine du polynôme au numérateur et aussi de celui du dénominateur. Donc $(x - a)$ divise l'un et l'autre. Cette méthode marche TOUT LE TEMPS.

Exemple :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}.$

2. $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 + 4x + 4}$

b) Limites associées à des dérivées



Rappel :

si f est dérivable en un point a , alors

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Proposition 3 : Limites usuelles en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

c) Changement de variable :



Méthode :

COMMENT SE RAMENER À UNE LIMITE EN 0

Si le calcul de limite est en un point autre que 0 et que l'on veut se ramener en 0, on effectue un changement de variable :

- Si la limite est en $a \in \mathbb{R}$, on pose $h = x - a$.

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h).$$

- si la limite est en $+\infty$, on pose $h = \frac{1}{x}$. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{h}\right)$.

- si la limite est en $-\infty$, on pose $h = \frac{1}{x}$ et alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{h}\right)$.

Exemples :

► $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(2-x)}{x-2}$

► $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

2) Limites en $+\infty$ ou en $-\infty$:

Technique élémentaire : Repérer les termes "les plus forts" et factoriser par ceux-ci



Proposition 4 : Croissances comparées

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ deux réels.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{e^{\alpha x}} = 0$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$

Les limites ci dessus, et seulement celles-ci, sont appelées "croissances comparées"

Exemple :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x^3 =$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x + 2}{x^2 + 1 + \ln x} =$

IV Fonctions continues

1) Définitions

a) Continuité en un point



Définition : continuité

► Soit I un intervalle et $a \in D_f$. Soit f une fonction définie sur I (et donc en a). On dit que f est **continue en a** si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et est finie.

On a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

► On dit que f est **continue sur D** si et seulement si $\forall a \in D$, f est continue en a .

Remarque :

Le fait que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ est une conséquence de la définition : c'est l'existence de cette limite qui fait qu'elle vaut $f(a)$... Il n'y a en quelque sorte "pas le choix".



NOTATION

On note $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ (ou simplement $\mathcal{C}(D)$) l'ensemble des fonctions continues sur D à valeur dans $\mathbb{R}$.

Exemples :

► Les fonctions polynômiales sont continues :

► On a déjà montré que $\cos$ et $\sin$ sont dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

► En fait, la plupart des fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition...

b) Continuité à droite ou à gauche



Définition : continuité à droite ou à gauche

On dit que f est **continue à droite** (resp. à gauche) en a si et seulement si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$

(resp. $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a)$)

Remarque :

Cette fois, il faut inclure dans la définition que la limite est bien $f(a)$: la limite à droite exclut a et le raisonnement effectuée pour la continuité "tout court" n'est plus possible.

Exemple :

Soit $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ on a vu que si $a \in \mathbb{Z}$, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \lfloor x \rfloor = \lfloor a \rfloor = f(a)$: on a donc f continue à droite.

En revanche, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \lfloor x \rfloor = \lfloor a \rfloor - 1 \neq f(a)$, donc f n'est pas continue à gauche.

**Proposition 5 :**

Soit $a \in D_f$ tel que a n'est pas une extrémité de I alors f est continue en a ssi f est continue à droite et à gauche

▷ *Preuve* :

◁

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ \sin x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

c) Prolongement par continuité**Définition : Prolongement par continuité**

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et soit $a \notin D_f$ mais tel que f admet en a une limite finie ℓ .

On dit qu'on **prolonge f par continuité** en posant pour valeur de f en ce point a la limite trouvée. :

$$\begin{aligned} D_f \cup \{a\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D_f \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction ainsi définie est continue en a , et on la note habituellement de la même façon que f .

Exemples :

► Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

► Soit $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$.

Remarque :

Par unicité de la limite, un prolongement par continuité ne se fait que d'une seule façon, justifiant encore une fois qu'on identifie f et son prolongement...

2) Théorème généraux

a) Opérations usuelles :



Proposition 6 :

Soit f et g deux fonctions continues sur D et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

1. $\lambda f + \mu g$ est continue sur D
2. fg est continue sur D
3. $\frac{f}{g}$ est continue en tout point de D où g ne s'annule pas

▷ *Preuve* : Immédiat par propriété calculatoire sur les limites.

◁

Exemple :

Les fractions rationnelles sont continues, en tant que quotient de fonctions continues, tout comme la fonction $\tan$.

b) Composition



Proposition 7 :

Soit $f : D \rightarrow G$ continue sur D et $g : H \rightarrow I$ continue sur H avec $G \subset H$, alors

$$g \circ f : D \rightarrow I \text{ est continue sur } D$$

▷ *Preuve* : C'est la composition de limite...

◁

Exemple :

Soit f définie par $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$.

V Les grands théorèmes autour de la continuité

1) Théorème des valeurs intermédiaires

a) Enoncé :



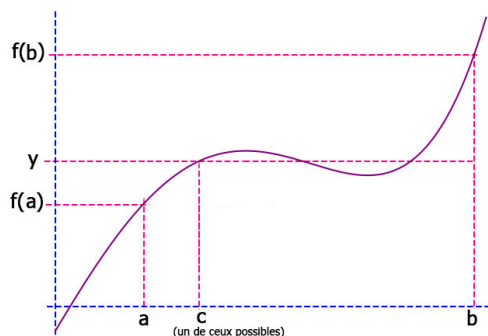
Theorème 7 : théorème des valeurs intermédiaires

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$.

Pour tout réel y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins un) c dans l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = y$

▷ *Preuve* : Voir TD!

◁



b) Recherche de zéros de fonctions par dichotomie

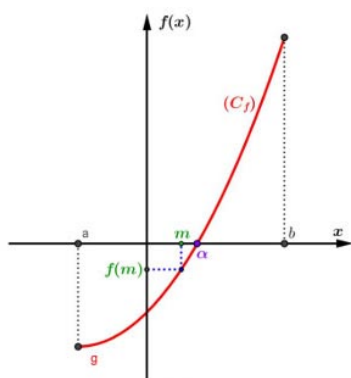
Soit f continue sur un intervalle $[a, b]$. On cherche α tel que $f(\alpha) = 0$ (on dit alors que α est un zéro de f)

Si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$: le problème est résolu.

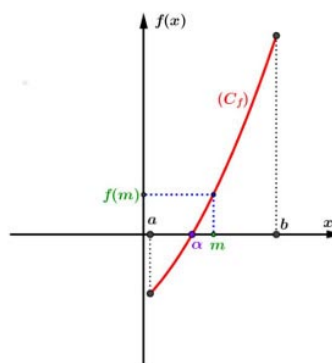
Si par exemple $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors comme 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$: le problème a donc au moins une solution.

Posons $m = \frac{a+b}{2}$. On calcule $f(m)$ et on a trois situations :

- Si $f(m) < 0$, alors f s'annule dans $[m, b]$. On recommence à l'étape précédente en posant $a = m$.



- Si $f(m) > 0$, alors f s'annule dans $[a, m]$ et on recommence en posant $b = m$



- Si $f(m) = 0$, alors on s'arrête... En pratique, ce cas ne se produit que rarement, car on utilise l'algorithme de dichotomie dans des cas où le zéro est difficile à trouver....

A chaque étape, la taille de l'intervalle est divisée par 2, ce qui fait qu'en n étapes, on trouve un zéro de f à $\frac{b-a}{2^n}$ près : c'est une estimation très précise et rapide !

c) Exemple d'étude de suites définies implicitement :

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique dans $[1, n]$ qu'on notera x_n .
2. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n \geq 1}$ puis sa limite.
3. Montrez que pour tout $n \geq 1$, on a : $f(n - \ln(n)) \leq n$. En déduire que $n - \ln(n) \leq x_n$.
4. Déterminer $\lim \frac{x_n}{n}$.

2) Image d'un intervalle par une fonction continue



Theorème 8 : image d'un intervalle

Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I . Alors $f(I)$ est un intervalle.

▷ *Preuve* :

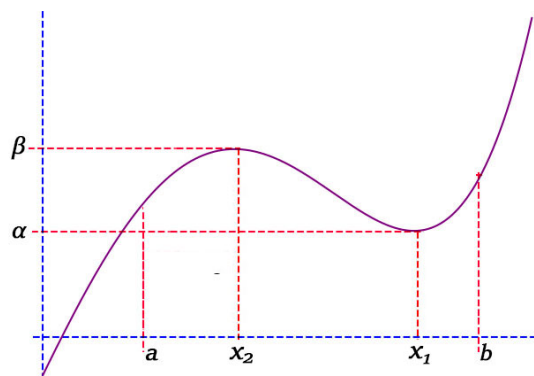
◁



Theorème 9 :

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé ($a, b \in \mathbb{R}$), alors $f(I)$ est un intervalle de la forme $[\alpha, \beta]$ avec $\alpha = \min_I f$ et $\beta = \max_I f$

On dit que f est **bornée et atteint ses bornes** : il existe $x_1 \in [a, b]$ tel que $f(x_1) = \min f$ et $x_2 \in [a, b]$ tel que $f(x_2) = \max f$.



▷ *Preuve* : On admet. Il s'agit de fonctionner via des suites bien choisies, mais c'est assez technique... ◁



Danger !

IMPORTANCE DE LA FERMETURE DE L'INTERVALLE

Le fait que l'intervalle soit fermé est essentiel. On a des contre-exemples faciles pour les cas non fermés :

- Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. La fonction f est continue sur $]0, 1]$, mais l'image de $]0, 1]$ est $[1, +\infty[$: elle n'est pas bornée.
- Soit $f : x \mapsto x^2$. La fonction f est continue sur $] - 1, 1[$ et l'image de $] - 1, 1[$ est $[0, 1[$. Ainsi, la fonction est effectivement bornée, mais la borne 1 n'est pas atteinte sur $] - 1, 1[$.

Exemple d'utilisation :

Soit $f(x) = x^2 - 3x + 2$. On veut déterminer l'image de l'intervalle $[-1, 1]$.

3) Continuité et bijections :



Theorème 10 : théorème de la bijection continue

Soit I un **intervalle** et soit f une fonction telle que :

(H1) : f est continue sur I .

(H2) : f est strictement monotone sur I .

Alors :

1. $f(I)$ est un intervalle.
2. f est une bijection de I sur $f(I)$.
3. l'application réciproque f^{-1} est de même monotonie que f .
4. l'application réciproque f^{-1} est continue également.

▷ *Preuve* : On a déjà tout démontré : il reste juste la continuité mais on l'admet.

◁

Exemples :

- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue, comme quotient de fonction continue. Donc $x \mapsto \ln(x)$ est continue, en tant que primitive.
Et donc $\exp$ est continue, en tant que fonction réciproque d'une fonction continue.
- De même, les racines n-ième et les fonctions trigonométriques réciproques sont des fonctions continues !