

Exercices

Exercice 1. Étudier la nature des intégrales suivantes :

- $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx;$
- $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{x} dx;$
- $\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1} dx;$
- $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx;$
- $\int_0^{+\infty} \sqrt{x^2 + 1} e^{-x} dx;$
- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx;$
- $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx;$
- $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx;$
- $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx;$
- $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}} dx.$

Exercice 2. Montrer la convergence et calculer les intégrales suivantes :

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx;$
- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t} \times (1+t)} dt;$
- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} x} dx.$

Exercice 3. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} dt. \end{aligned}$$

- Montrer que f est bien définie.
- Calculer $f(1)$ (on pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{1}{t}$).
- En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 4.

- Montrer que pour $X \geq 1$, $\int_1^X \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \frac{\cos X}{X} - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2} dx.$
- Montrer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

est convergente.

- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin^2(x)}{x} \geq \frac{1}{2(k+1)}.$$

- Montrer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

n'est pas absolument convergente.

- La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ est-elle intégrable sur $]0; +\infty[$? L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ est-elle convergente?

Exercice 5. Soit f une fonction rationnelle. Sur quels intervalles f est-elle intégrable?

Exercice 6.

- Pour quelles valeurs du réel α la fonction $f : t \mapsto t^\alpha e^{-\sqrt{t}}$ est-elle intégrable sur $]0; +\infty[$?
- Calculer $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\sqrt{t}} dt.$

Exercice 7.

- Montrer que $f : x \mapsto \ln(\sin x)$ est intégrable sur $]0; \pi[$.
- Montrer que :

$$\int_0^\pi \ln(\sin t) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt.$$

- En déduire la valeur de :

$$\int_0^\pi \ln(\sin t) dt.$$

Exercice 8.

1. Pour quelles valeurs du couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ la fonction $t \mapsto t^m (\ln t)^n$ est-elle intégrable sur $]0; 1[$?

Dans ce cas, calculer :

$$I_{m,n} = \int_0^1 t^m (\ln t)^n dt.$$

2. Déterminer un équivalent de $I_{n,n}$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 9.

1. Montrer que :

$$\int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-n}}{n}.$$

2. Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+n} dt$$

Exercice 10. Déterminer un équivalent simple de

$$\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t}} dt$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercices CCINP**Exercice 11 (CCINP 28).**

N.B. : les deux questions sont indépendantes.

- La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2; +\infty[$?
- Soit a un réel strictement positif.
La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0; +\infty[$?