TP n°8
Amplificateur Linéaire Intégré – Méthode d'Euler

PCSI$_2$ 2024 – 2025

I Prise en main de l'ALI

Les ALI disponibles en TP sont montés sur des plaquettes qui peuvent être placées facilement sur les plaques habituelles de TP. Seules les bornes d'alimentation et les bornes inverseuses et non-inverseuse vous sont accessibles.

Attention : L'alimentation $+15/-15V$ doit être branchée AVANT d'envoyer un quelconque signal sur l'entrée de l'ALI, sans quoi il y a risque de détérioration.

Attention au sens de branchement de l'alimentation. L'inversion des deux bornes d'alimentation est fatale pour l'ALI.

Méthode : Circuit électrique avec ALI AVANT TOUTE CHOSE :

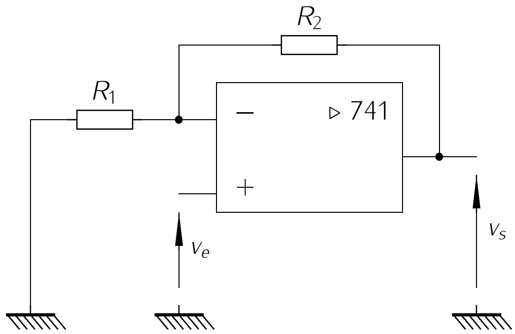
1. placer l'ALI sur la plaque en prenant garde à ne pas court-circuiter les bornes ;
2. alimenter l'ALI : relier les bornes d'alimentation aux sorties +15 V et −15 V de l'alimentation ;
3. brancher un fil noir à la masse de l'alimentation et le brancher sur une des bornes de la plaquette, **il faudra penser à le brancher, à la fin, à la masse commune des GBF/oscilloscope** ;
4. brancher et allumer l'alimentation. **Ne pas l'éteindre avant la fin du TP !**
   PUIS COMME D'HABITUDE :
5. Représenter le circuit.
6. Placer dessus les voies de l'oscilloscope.
7. Réaliser le circuit **COMME SUR LE SCHÉMA** : *i.e.* avec les composants **DISPOSÉS COMME SUR LE SCHÉMA**.
8. Relier la masse de l'alimentation de l'ALI à la masse commune du GBF et de l'oscilloscope.
9. finir de relier l'oscilloscope au circuit.

II Amplificateur non inverseur

1. Étude théorique

On considère le montage représenté ci-contre, la boucle de rétroaction négative assure le fonctionnement en régime linéaire tant que $|v_s| < V_{\text{sat}}$.

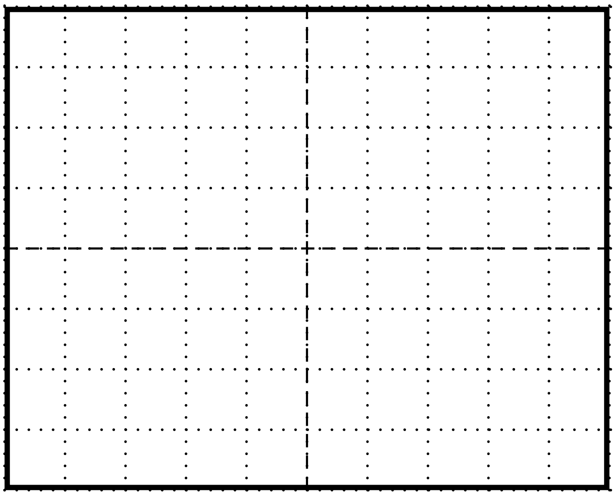
Déterminer la valeur théorique du facteur d'amplification $\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$ par la méthode de votre choix, en déduire le gain statique H_0 et le déphasage φ de v_s par rapport à v_e sinusoïdales.

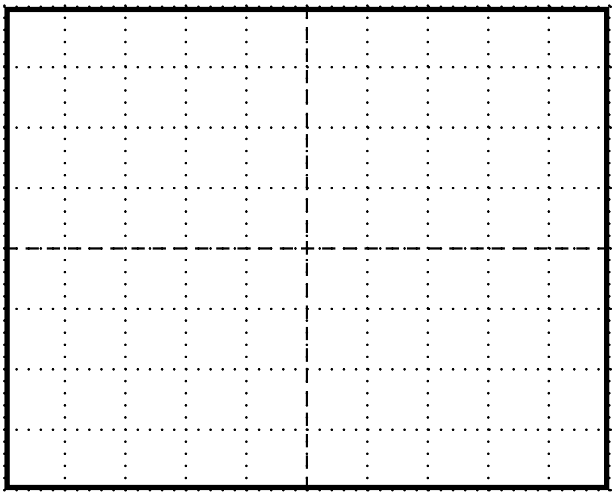


2. Montage, contrôle du bon fonctionnement

Pour réaliser le montage précédent, on utilisera pour R_1 un résistor 1 kΩ à ficher directement sur la plaquette. R_2 est un résistor de résistance variable (boite à décade de résistance), réglée à de façon à obtenir $H_0 = 10$, v_e la tension délivrée par le GBF.
Il est alimenté, en entrée, par un GBF délivrant une tension sinusoïdale de fréquence $f = 1,0 kHz$ et d'amplitude $1,0 V$
On visualisera en voie 1 le signal d'entrée $v_e(t)$ et en voie 2 le signal de sortie $v_s(t)$.

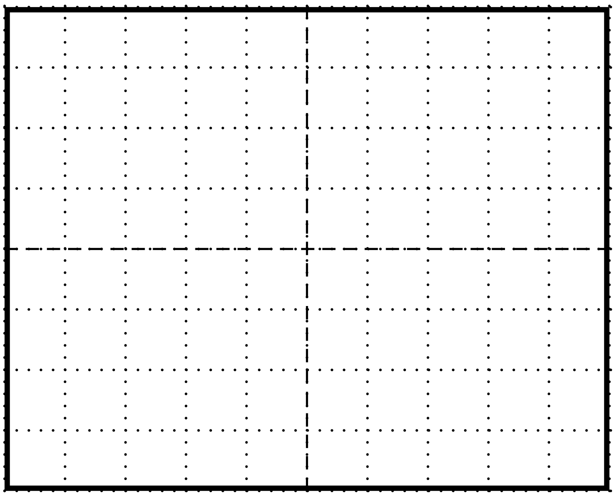
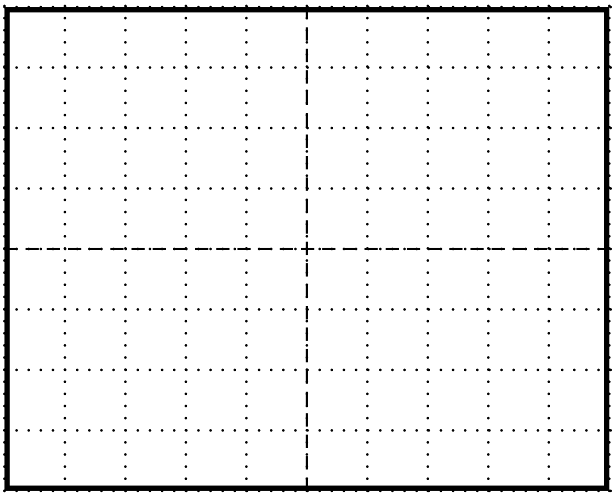
- Réaliser le montage en suivant scrupuleusement la méthode ci-dessus, sans quoi vous vous attirerez les foudres de votre enseignant.
- Vérifier que le montage fonctionne correctement.
- Reproduire ci-dessous l'allure des oscillographes en mode balayage et en mode XY.





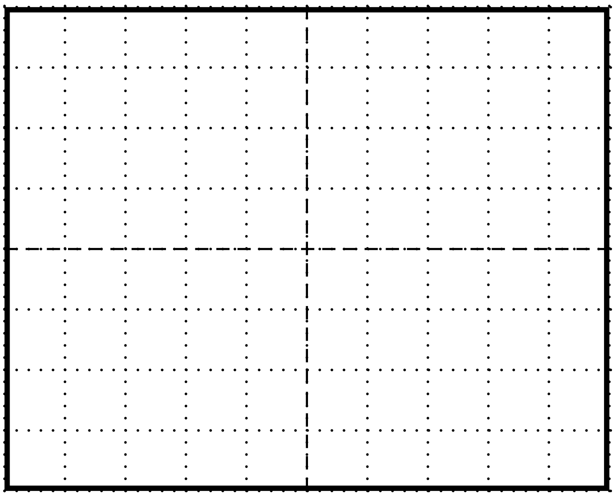
La relation $V_s = H_0 V_e$ est-elle toujours valable ?

- Augmenter l'amplitude du signal d'entrée à 2 V.
  Dessiner à nouveau l'allure des oscillographes en mode bicourbe et en mode XY.

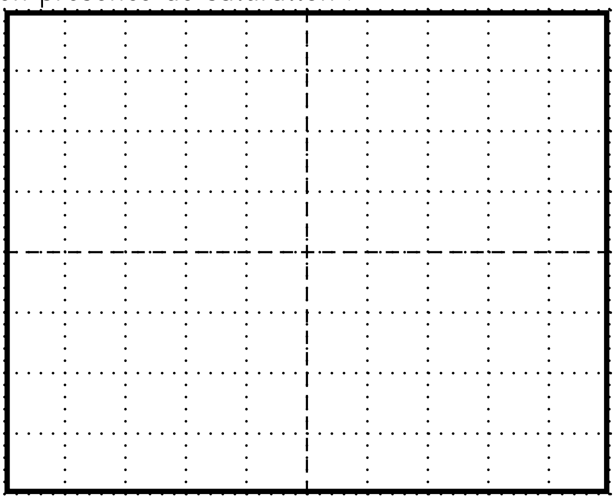
 

Que se passe-t-il ?

- En utilisant la FFT de l'oscilloscope, observez les spectres du signal de sortie pour la tension d'entrée d'amplitude 1 V , puis pour la tension d'entrée d'amplitude 2 V.
- Reproduire le spectre obtenu en l'absence de saturation.



- Combien y a-t-il de pics ? À quelles fréquences ?
- Reproduire le spectre en présence de saturation .



- Combien y a-t-il de pics ? À quelles fréquences ?
- Quel est l'impact de la saturation sur les fréquences présentes dans le signal de sortie ?

III Filtre actif

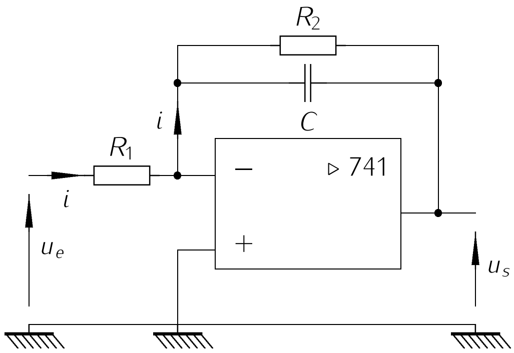
On étudie le circuit ci-dessous, avec $R_1 = 1,0k\Omega$; $R_2 = 4,7k\Omega$ et $C = 22nF$

Il est alimenté, en entrée, par un GBF délivrant une tension sinusoïdale d'amplitude $1,0V$
On visualisera en voie 1 le signal d'entrée $u_e(t)$ et en voie 2 le signal de sortie $u_s(t)$.

La fonction de transfert de ce montage est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + R_2 C j\omega}$$

de pulsation de coupure $\omega_c = \dfrac{1}{R_2 C}$.



- Réaliser le montage en suivant scrupuleusement la méthode ci-dessus, sans quoi vous vous attirerez les foudres de votre enseignant.
- Effectuer un balayage en fréquence de 10 Hz à 100 kHz.
- Notez précisément vos observations : à basse fréquence, à haute fréquence, évolution du gain avec la fréquence, évolution de la phase avec la fréquence.
- Sur quelle gamme de fréquences le gain du filtre est-il constant ?
- Mesurer le gain et la phase sur cette gamme de fréquence.
- Comparer avec les résultats attendus compte-tenu de la fonction de transfert et valeurs des composants.

Le circuit est maintenant alimenté, en entrée, par un GBF délivrant un signal créneau de fréquence 10 fois supérieure à la fréquence de coupure.

- Noter précisément les observations.

IV Résolution numérique d'équations différentielles

La méthode d'Euler permet de résoudre de manière approchée des équations différentielles présentées sous la forme

$$\begin{cases} y'(t) = F\big(y(t), t\big), \quad t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

où F est une fonction de deux variables (y, t), définie au voisinage de (y_0, t_0). Ce cadre permet d'étudier la plupart des équations différentielles du premier ordre sur un intervalle de temps fini $[t_0, t_0 + T]$, munie d'une condition initiale à l'instant t_0.

On rappelle qu'une solution est : une fonction $y : t \in [t_0; t_0 + T] \mapsto y(t) \in \mathbb{R}^p$ vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$ et pour tout $t \in [t_0; t_0 + T]$, la relation $y'(t) = F(y(t), t)$. Dans les bons cas, F est définie sur une partie de $\mathbb{R}^p \times [t_0; t_0 + T]$. Les cas les plus usuels correspondent à $p \leq 3$ et même très souvent $p = 1$.

1. Cas des équations différentielles du premier ordre dans $\mathbb{R}$

Ici, on s'intéresse au cas $p = 1$ (qui nous servira de référence par la suite).

1.a. Exemples

$$\begin{cases} y'(t) = -2\,y(t), \quad t \in [0, 1] \\ y(0) = 1, \end{cases} \qquad F : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto -2x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y'(t) + \cos(t)\,y(t) = \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi] \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad F : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \sin(t) - x\cos(s) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t)(1 - y(t)), \quad t \in [0, 10] \\ y(0) = 10^{-4}, \end{cases} \qquad F : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto 2x(1 - x) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{1 - t(y(t))^2}, \quad t \in [0, 1] \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad F : (x, t) \in \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid t\,x^2 < 1\} \mapsto \sqrt{1 - tx^2} \in \mathbb{R}_+$$

1.b. Principe de la méthode d'Euler

Graphiquement, la méthode d'Euler consiste à approcher la courbe (le graphe) de la fonction solution y, inconnue, par une ligne brisée que l'on construit point après point (approximation affine par morceaux).
On peut aussi penser une situation physique où un mobile est à un instant t à une position $M(t)$, avec une vitesse $\vec{v}(t) = \vec{F}(M(t), t)$. Comment approcher sa position à l'instant $t + \mathrm{d}t$?

$\vec{O}M(t + h) = \vec{O}M(t) + \mathrm{d}t\vec{v}(t)$.

On imagine que si l'on prend dt assez petit, on pourra ainsi tracer la trajectoire comme une succession de lignes brisées approchant assez bien la réalité, la vitesse aux instants utiles étant facile à obtenir en utilisant l'approximation de trajectoire faite.

On décompose l'intervalle d'étude en y répartissant $n + 1$ instants régulièrement espacés (donc il y a n intervalles de temps) : $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = t_0 + T$.
Deux instants consécutifs sont donc séparés d'un même pas temporel $h = \frac{T}{n}$

- La valeur de la solution en l'instant t_0 est donnée par l'équation : c'est y_0.
  On partira donc du point M_0 (t_0, y_0)
- Pour construire le point suivant, on ne connaît pas la courbe solution entre t_0 et t_1, mais sa tangente au point d'abscisse t_0 (vitesse à la date t_0) est connue grâce à l'équation différentielle. En effet, la pente de cette tangente (la vitesse) vaut

$$y'(t_0) = F(y(t_0), t_0) = F(y_0, t_0) \text{ qui est calculable.}$$

On décide d'assimiler la courbe de y sur l'intervalle $[t_0; t_1]$ à sa tangente en t_0 (on suppose la vitesse constante pendant l'intervalle). On en déduit une approximation de $y(t_1)$:

$$y(t_1) = y(t_0 + h) \simeq y(t_0) + hF(y_0, t_0) = y_0 + hF(y_0, t_0)$$

On pose donc $y_1 = y_0 + hF(y_0, t_0)$ et on place le point M_1 (t_1, y_1)

— On passe de l'instant t_1 à l'instant t_2 de manière similaire. En l'instant t_2, la tangente à la courbe solution a pour pente $y'(t_1) = F(y(t_1), t_1) \simeq F(y_1, t_1)$
En assimilant la courbe de y entre t_1 et t_2 à sa tangente en t_1, on obtient

$$y(t_2) = y(t_1 + h) \simeq y(t_1) + hF(y(t_1), t_1) \simeq y_1 + hF(y_1, t_1)$$

On pose donc $y_2 = y_1 + hF(y_1, t_1)$ et on place le point M_2 (t_2, y_2)

— Et ainsi de suite jusqu'à arriver à t_n :

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad y(t_{k+1}) = y(t_k + h) &\simeq y(t_k) + hy'(t_k) \\ &= y(t_k) + hF\big(y(t_k), t_k\big) \\ &\simeq y_k + hF(y_k, t_k)\end{aligned}$$

2. Bilan

Pour résoudre de manière approchée le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = F\big(y(t), t\big), & t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

la méthode d'Euler consiste à introduire des instants régulièrement espacés

$$t_k = t_0 + kh \quad \text{où } h = \frac{T}{n} \text{ est le pas de la méthode },$$

puis d'approcher les valeurs de la solution aux instants t_k par les nombres y_k calculés de manière récurrente par :

$$\boldsymbol{\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad y_{k+1} = y_k + hF(y_k, t_k)}$$

Les points $M_k(t_k, y_k)$ dessinent une ligne brisée qui approche la courbe solution sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$.

3. Réponse d'un système du premier ordre à une excitation gaussienne

On souhaite résoudre numériquement le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{aligned} y'(t) + \frac{y(t)}{\tau} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left(\frac{t - t_0}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right), \quad t \in \mathbb{R}_+ \\ y(0) &= 0, \end{aligned}$$

On prendra les paramètres suivants : $\tau = 2,2.10^{-4}$ s, $\sigma = 0,5\tau$ et $t_0 = 5\sigma$.

1. Importer les fonctions `exp`, `sqrt` et la constante `pi` du module `math` (`from math import exp, sqrt, pi`)
2. Définir les variables globales : `tau`, `sigma`, `t0`, `T` et `n`.

3. Définir la fonctionnelle F : écrire une fonction `F` qui prend en argument `y` et `t` et qui renvoie $F(y, t)$
4. Résoudre numériquement le problème de Cauchy à l'aide de la méthode d'Euler. On stockera les valeurs de `y` et `t` dans deux listes : `lst_y` et `lst_t`.
5. Afficher sur une même courbe $y(t)$ et le forçage $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right)$
6. Jouer avec le paramètre h et conclure sur son influence.