ESPACES PROBABILISÉS

Cours

I. Rappels sur les espaces probabilisés finis

Définition 1

- On appelle *expérience aléatoire* une expérience qui, reproduite dans des conditions identiques, peut conduire à des résultats différents non prévisibles à l'avance.
- On appelle *univers* l'ensemble des résultats observables - ou issues possibles - d'une expérience aléatoire.

- On utilise habituellement les notations Ω pour l'univers et ω pour l'un de ses éléments.
- En première année, vous n'avez étudié que le cas où l'univers Ω est un ensemble *fini*.
  Exemple : On lance un dé à 6 faces. On choisit dans ce cas comme univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Définition 2

On appelle *événement* un fait attaché à l'expérience aléatoire dont on peut dire suivant le résultat observé s'il s'est réalisé ou non. On identifie un événement avec l'ensemble des issues pour lesquelles il se réalise. Un événement est donc aussi une partie de l'univers Ω.

Exemple : Soit A l'événement « Obtenir un chiffre pair ». On a $A = \{2, 4, 6\}$.

- Les opérations sur les événements correspondent à des opérations sur les parties de Ω.
  On utilise un vocabulaire spécifique aux événements (*cf* page suivante).

- Un événement est une partie de Ω.
  Réciproquement, *lorsque* Ω *est fini*, on considère que toute partie de Ω est un événement. L'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω représente donc l'ensemble des événements.

Définition 3

Soit Ω un ensemble fini.

- On appelle *probabilité* sur Ω toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, 1]$ vérifiant :
  $\boxed{1}$ $P(\Omega) = 1$,
  $\boxed{2}$ *Additivité :* $\forall (A, B) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^2$ vérifiant $A \cap B = \varnothing$, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Pour $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on dit alors que $P(A)$ est *la probabilité de l'événement* A.

Vocabulaire probabiliste	Vocabulaire ensembliste
Événement certain C'est l'événement Ω, il se réalise toujours	Ensemble Ω
Événément impossible C'est l'événement $\varnothing$, il ne se réalise jamais	Ensemble vide $\varnothing$
Événement élémentaire C'est un événement qui ne se réalise que pour une seule issue	Singleton C'est un ensemble à un seul élément $\{\omega\}$ avec $\omega \in \Omega$
Événement contraire de A $\overline{A}$ se réalise si et seulement si A ne se réalise pas	Complémentaire de A dans Ω ${}^{c}A = \complement_{\Omega} A = \Omega \setminus A$
Événement A et B $A \cap B$ se réalise si et seulement si A se réalise et B se réalise	Intersection de A et B $A \cap B = \{\omega \in \Omega,\ \omega \in A \text{ et } \omega \in B\}$
Événement A ou B $A \cup B$ se réalise si et seulement A se réalise ou B se réalise	Réunion ou union de A ou B $A \cup B = \{\omega \in \Omega,\ \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$
Événément A_1 et A_2 et $\cdots$ A_n $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ se réalise si et seulement si tous les A_i se réalisent	Intersection finie $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \in \Omega \ /\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ \omega \in A_i\}$
Événément A_1 ou A_2 ou $\cdots$ A_n $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ se réalise si et seulement si l'un au moins des A_i se réalise	Union finie $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \in \Omega \ /\ \exists i \in [\![1, n]\!],\ \omega \in A_i\}$
A implique B Si A se réalise alors B se réalise	Inclusion $A \subset B$ Si $\omega \in A$ alors $\omega \in B$
Événements incompatibles Ce sont deux événements qui ne peuvent pas se réaliser simultanément	Ensembles disjoints Ce sont deux ensembles A et B tels que $A \cap B = \varnothing$
Système complet fini d'événements $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ À chaque expérience, un et un seul des A_i se réalise	Partition finie de Ω $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ et pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$

On rappelle le cas particulier de la probabilité uniforme, utilisée en situation d'équiprobabilité.

Définition/Proposition 4

- Deux événements sont dits *équiprobables* lorsqu'ils ont la même probabilité.
- Il y a *équiprobabilité* lorsque tous les événements élémentaires sont équiprobables.
- Soit Ω un ensemble fini.
  Il existe une unique probabilité P sur Ω telle qu'il y ait équiprobabilité.
  Elle est appelée *la probabilité uniforme* et elle vérifie pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables (c'est-à-dire où } A \text{ se réalise)}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Dans le cas général, on peut définir une probabilité sur un ensemble fini en définissant la probabilité de chaque événément élémentaire.

Proposition 5

Soit Ω un ensemble fini.
Si $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une famille de réels positifs vérifiant $\sum\limits_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$ alors il existe une unique probabilité P sur Ω telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) = p_\omega$.

Définition 6

Soit Ω un ensemble fini. Soit P une probabilité sur Ω.
On dit que $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ - ou (Ω, P) - est un *espace probabilisé fini.*

On dispose d'un cadre théorique pour étudier une expérience aléatoire avec un univers fini :

$$(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$$

où : $\star$ Ω désigne l'univers,
$\star$ $\mathscr{P}(\Omega)$ représente l'ensemble des événements considérés,
$\star$ P désigne la probabilité choisie.

C'est une *modélisation* de l'expérience aléatoire.

Exemple 1 : On lance à trois reprises une pièce équilibrée.
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux *face* ?

Exemple 2 : Une urne contient 5 boules blanches et 10 boules noires.

1. On tire au hasard successivement et avec remise 2 boules de l'urne.
   Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche et une boule noire dans cet ordre ?
   Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche et une boule noire dans un ordre quelconque ?
2. Mêmes questions dans le cas de tirages sans remise.
3. On tire simultanément 5 boules de l'urne.
   Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 3 boules noires ?

II. Cas général

On cherche désormais à modéliser une expérience aléatoire d'univers Ω non néssairement fini.

Exemples :

- On lance un dé à six faces et on s'arrête lorsqu'on obtient 6.
  On choisit de représenter l'expérience par le nombre de lancers effectués.
  On considère comme univers $\Omega = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, $+\infty$ désignant le cas où on n'obtient jamais 6 (Ω est dénombrable).
- On s'intéresse à la durée de vie d'un atome radioactif.
  On choisit dans ce cas comme univers $\Omega = [0, +\infty[$ (Ω n'est pas dénombrable).

A. Tribu

Lorsque Ω est un ensemble fini, on modélise l'expérience aléatoire en considérant que l'ensemble des événements étudiés est $\mathscr{P}(\Omega)$. Lorsque Ω est un ensemble infini non dénombrable, l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ est « trop gros » et construire une probabilité $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ pose des problèmes théoriques. On décide alors de modéliser l'ensemble des événements considérés par une *tribu* dont voici la définition.

Définition 7

Soit Ω un ensemble. Soit $\mathscr{A}$ un sous-ensemble de $\mathscr{P}(\Omega)$.
On dit que $\mathscr{A}$ est une *tribu* sur Ω lorsque :

- $\Omega \in \mathscr{A}$,
- $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire : pour tout $A \in \mathscr{A}$, on a $\overline{A} \in \mathscr{A}$,
- $\mathscr{A}$ est stable par union dénombrable :
  pour toute famille dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, on a $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$.

Exemples : Soit Ω un ensemble.

- $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu.
- $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu.
- Si A est un sous-ensemble de Ω alors $\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu.

Proposition 8

Soit Ω un ensemble et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.

- $\varnothing \in \mathscr{A}$.
- $\mathscr{A}$ est stable par union finie et intersection finie :
  pour toute famille finie $(A_1, \ldots, A_n)$ d'éléments de $\mathscr{A}$, on a $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$ et $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$.
- $\mathscr{A}$ est stable par intersection dénombrable :
  pour toute famille dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, on a $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$.

Décider de représenter l'ensemble des événements considérés par la tribu $\mathscr{A}$, signifie qu'il est équivalent d'écrire :

$$A \in \mathscr{A} \text{ ou } A \text{ est un événement.}$$

D'après les propriétés d'une tribu, toutes les opérations « habituelles » entre des événements donnent bien toujours un événement.

Exemple 3 : Soit A et B deux événements.
On considère les ensembles $A \setminus B$ (appelé *différence de A et B*) et $A \Delta B$ (appelé *différence symétrique de A et B*) définis par :

$$A \setminus B = \{\omega \in \Omega\,;\ \omega \in A \text{ et } \omega \notin B\}\ ,\ A\Delta B = \{\omega \in \Omega\,;\ \omega \in A \cup B \text{ et } \omega \notin A \cap B\}.$$

Montrer que $A \setminus B$ et $A\Delta B$ sont des événements et préciser quand ils se réalisent.

Précisons ce que signifient les événements $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ et $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ avec I dénombrable.

Définition 9

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable d'événements.

- $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est l'événement qui se réalise lorsque l'un au moins des A_i se réalise.
  En termes ensemblistes, pour $\omega \in \Omega$: $\omega \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I$ tel que $\omega \in A_i$.
- $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ est l'événement qui se réalise lorsque tous les A_i se réalisent.
  En termes ensemblistes, pour $\omega \in \Omega$: $\omega \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I\,,\ \omega \in A_i$.

On notera que la distributivité et les lois de Morgan, connues pour les unions et intersections finies, sont encore vraies avec les unions et intersections dénombrables.
Si B est un événement, on a :

$$B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i) \text{ et } B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i).$$

On a :

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i} \text{ et } \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Exemple 4 : On lance une pièce équilibrée une infinité de fois.

1. Déterminer l'univers de cette expérience aléatoire. Est-il dénombrable ?
2. Soit A : « On n'obtient que des *face* » et B : « On obtient au moins une fois *pile* ».
   Exprimer A et B en fonction des événements F_k : « On obtient *face* au k-ème lancer » $(k \in \mathbb{N}^*)$.

Définition 10

On appelle *système complet d'événements* toute famille $(A_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable d'événements telle que quelle que soit l'issue de l'expérience aléatoire, un et un seul des A_i est réalisé.
En d'autres termes, c'est une famille d'événements deux à deux incompatibles et d'union Ω c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (i,j) \in I^2 \text{ avec } i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{et} \quad \bigcup_{i\in I} A_i = \Omega.$$

Définition 11

Soit Ω un ensemble. Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.
On dit que $(\Omega, \mathscr{A})$ est un *espace probabilisable.*

B. Probabilité

1. Définitions

Définition 12

Soit Ω un ensemble et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.

- On appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $P : \mathscr{A} \to [0,1]$ vérifiant :
  $\boxed{1}$ $P(\Omega) = 1$,
  $\boxed{2}$ *σ-additivité :* pour toute famille dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'événements deux à deux incompatibles, on a $P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i)$.
- Pour $A \in \mathscr{A}$, on dit que $P(A)$ est *la probabilité de l'événement A.*

Notons que la somme $\sum_{i\in I} P(A_i)$ ci-dessus est à comprendre au sens des familles sommables et qu'on a nécessairement dans ce cas $\sum_{i\in I} P(A_i) < +\infty$.

Dans le cas particulier où $I = \mathbb{N}$, cela signifie que la série $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ converge et $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

Définition 13

Soit Ω un ensemble, $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω et P une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
On dit que $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un *espace probabilisé.*

$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est une modélisation de l'expérience aléatoire étudiée où :
- $\star$ l'ensemble Ω désigne l'univers,
- $\star$ la tribu $\mathscr{A}$ représente l'ensemble des événements considérés,
- $\star$ P est la probabilité choisie.

Si Ω est au plus dénombrable, on choisit habituellement $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ et on peut définir P à partir des probabilités des événements élémentaires.

Proposition 14

On suppose que Ω est un ensemble au plus dénombrable.
Si $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une famille de réels positifs vérifiant $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$ alors il existe une unique probabilité P sur Ω telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) = p_\omega$.

Dans la plupart des cas, on ne déterminera explicitement ni l'univers, ni la probabilité, ni la tribu. On supposera juste qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ modélisant l'expérience aléatoire et dans lequel on peut mener les calculs souhaités.

Dans toute la suite, on suppose fixé un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Définition 15

Un événement A est dit *négligeable* lorsque $P(A) = 0$.
Un événement A est dit *presque sûr* lorsque $P(A) = 1$.

Attention, un événement peut être de probabilité nulle sans être l'événement impossible $\varnothing$ ou être de probabilité 1 sans être l'événement certain Ω.

Exemple 4 (suite) : Exprimer B en fonction des événements A_k : « On obtient *pile* pour la première fois au k-ème lancer » $(k \in \mathbb{N}^*)$ et en déduire $P(B)$.

Définition 16

On appelle *système quasi-complet d'événements* toute famille $(A_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable d'événements telle que :

$$\forall (i,j) \in I^2 \text{ avec } i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{et} \quad \sum_{i\in I} P(A_i) = 1.$$

On notera qu'un système complet d'événements est un système quasi-complet d'événements.

2. Propriétés de calculs

Proposition 17

On a $P(\varnothing) = 0$.

Proposition 18

Soit A et B deux événements.

- $\boxed{\textit{Croissance}}$ Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$.
- On a $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- On a $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.
- On a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemple 5 : Soit A et B deux événements. On suppose que $P(A) = 0$.
Montrer que $P(A \cap B) = 0$.

Proposition 19

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'événements.

- $\boxed{(\sigma)\text{-}\textit{additivité}}$ Si les événements A_i ($i \in I$) sont deux à deux incompatibles alors

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i).$$

- $\boxed{\textit{Sous-additivité}}$ On a toujours $P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leqslant \sum_{i\in I} P(A_i)$.

On notera que dans la sous-additivité, on peut avoir $\sum_{i\in I} P(A_i) = +\infty$.

Proposition 20 (*Propriété de continuité croissante / décroissante*)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$ alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$ alors $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.
- On a toujours :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \text{ et } P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right).$$

Exemple 6 : On lance un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement « Avant le n-ème lancer, on a obtenu 4 au moins une fois ».
On note A l'événement « Le 4 sort au moins une fois ».
Exprimer A en fonction des événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer $P(A)$.

III. Probabilités conditionnelles et indépendance

A. Probabilités conditionnelles

1. Définition

Définition/Proposition 21

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$.

- Pour tout événement B, on note :

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

  L'application $P_A : \mathscr{A} \to [0,1]$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
- Pour $B \in \mathscr{A}$, $P_A(B)$ est appelée *la probabilité conditionnelle de B sachant A.*

- On rencontre parfois les notations $P(B|A)$ et $P(B/A)$ à la place de $P_A(B)$.

- Comme une probabilité conditionnelle est une probabilité, toutes les propriétés vues pour les probabilités sont encore vraies avec des probabilités conditionnelles.

- Lorsque P est la probabilité uniforme, on a pour tous événements A et B avec $P(A) \neq 0$:

$$P_A(B) = \frac{\frac{\mathrm{Card}(B\cap A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}}{\frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}} = \frac{\mathrm{Card}(B \cap A)}{\mathrm{Card}(A)} = \frac{\text{nombre de cas favorables à } B \cap A}{\text{nombre de cas possibles pour } A}.$$

  On peut voir cette formule comme un changement d'ensemble de référence.

2. Propriétés

a) Formule des probabilités composées

Soit A et B deux événements.
Si $P(A) \neq 0$ alors comme $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, on a $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
Si $P(A) = 0$ alors $P(A \cap B) = 0$ (voir *exemple 5*) et on pose alors par convention $P(A) \times P_A(B) = 0$ (même si $P_A(B)$ n'existe pas).
Avec cette convention, on a alors dans tous les cas :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).}$$

On peut généraliser cette formule à une intersection finie d'événements.

Théorème 22 (*Formule des probabilités composées*)

Soit $A_1, \dots, A_n$ n événements (avec $n \geqslant 2$). On a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Exemple 7 : Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires.
On tire successivement et sans remise 3 boules dans cette urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir la première boule blanche au troisième tirage ?
On proposera deux méthodes.

b) Formule des probabilités totales

Théorème 23 (*Formule des probabilités totales*)

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système quasi-complet d'événements (avec I ensemble au plus dénombrable).
Pour tout événement B, on a :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B\cap A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i)\times P_{A_i}(B).$$

- On utilise ici la même convention que précédemment.
- On notera que comme $(A,\overline{A})$ est un système complet d'événements, on a en particulier pour tous événements A et B :

$$\boxed{P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B) = P(A)\times P_A(B) + P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B).}$$

- En pratique, la formule des probabilités totales s'utilise pour une expérience aléatoire se déroulant en deux étapes, la seconde étape dépendant de la première.
  À la première étape, un et un seul des A_i est réalisé. À la seconde étape, B est réalisé ou non.
  Cette formule permet alors de calculer la probabilité de B (étape 2).
- Cette situation peut être représentée par un arbre probabiliste. Un tel arbre peut être représenté mais ne constitue pas une preuve rigoureuse. Il faudra clairement indiquer qu'on applique la formule des probabilités totales en indiquant le système quasi-complet d'événements utilisé.

Exemple 8 : On dispose d'une pièce équilibrée et d'une urne contenant une boule blanche.
On suppose que l'on dispose également d'un stock infini de boules noires.
On lance la pièce jusqu'à obtenir Face.
S'il a fallu n lancers pour obtenir Face ($n\in\mathbb{N}^*$), on rajoute $n!-1$ boules noires dans l'urne.
On tire alors une boule dans cette urne.
Déterminer la probabilité d'obtenir la boule blanche.

c) Formule de Bayes

Théorème 24 (*Formule de Bayes*)

Si A et B sont deux événements avec $P(B)\neq 0$, on a :

$$P_B(A) = \frac{P(A)\times P_A(B)}{P(B)}.$$

- On notera que l'on peut de plus utiliser la formule des probabilités totales pour calculer $P(B)$.

$$P_B(A) = \frac{P(A)\times P_A(B)}{P(A)\times P_A(B) + P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)}.$$

Plus généralement avec $(A_i)_{i\in I}$ un système quasi-complet d'événements, on a pour tout $i \in I$:

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\sum_{j\in I} P(A_j) \times P_{A_j}(B)}.$$

- La formule de Bayes s'utilise également pour une expérience aléatoire se déroulant en deux étapes. Elle est aussi appelée *formule de probabilité des causes.*
  Connaissant la conséquence (événement B - étape 2), elle permet de calculer la probabilité d'une cause (événement A_i - étape 1) (ordre antichronologique).

Exemple 8 (suite) : On obtient une boule noire.
Quelle est la probabilité d'avoir fait 10 lancers de la pièce ?

B. Indépendance

1. Indépendance de deux événements

Définition 25

Soit A et B deux événements.
On dit que les événements A et B sont *indépendants (pour la probabilité P)* lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Notons que la notion d'indépendance dépend de la probabilité.

Proposition 26

- Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$. Soit B un événement.
  Alors A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.
- Soit A un événement tel que $P(A) = 0$.
  Alors A est indépendant de tout autre événement.

- Intuitivement, deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants lorsque la réalisation d'un de ces événements ne donne pas d'information sur la réalisation de l'autre.

- Attention de ne pas confondre *incompatible* et *indépendant.*

Deux événements *incompatibles* sont deux événements qui ne peuvent pas se réaliser en même temps.
Deux événements *indépendants* sont deux événements dont la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre.

Proposition 27

Si les événements A et B sont indépendants alors les événements A et $\overline{B}$, les événements $\overline{A}$ et B et les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

2. Indépendance d'une famille finie d'événements

Définition 28

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie d'événements.
On dit que les événements A_i pour $i \in I$ sont *indépendants (pour la probabilité P)* lorsque pour tout sous-ensemble J non vide de I, $P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i)$.

- L'indépendance implique l'indépendance deux à deux mais la réciproque est fausse dès que $\mathrm{Card}(I) \geqslant 3$.

- L'indépendance est conservée si l'on remplace certains événements par leur événement contraire.

- Certaines situations donnent naturellement lieu à des événements indépendants (on lance plusieurs fois une pièce / on effectue des tirages successifs avec remise).
  Attention, des tirages successifs sans remise ne donnent pas des événements indépendants.

On retiendra les formules permettant de calculer la probabilité d'une intersection finie d'événements :

Proposition 29 (*Probabilité d'une intersection finie*)

Soit $A_1, \ldots, A_n$ n événements (avec $n \geqslant 2$).

- *Formule des probabilités composées* :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1\cap A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

- Si les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Exemple 9 : Étant donnés des événements indépendants A_i où $i \in [\![1, n]\!]$, montrer que la probabilité pour qu'aucun des A_i ne soit réalisé est au plus égale à : $\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\right)$.