Conseils :

- Lisez attentivement l'énoncé du début à la fin et choisissez **ensuite** par quel problème commencer (aucun ordre n'est imposé).
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **rédaction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).
  Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés. Laissez une marge à gauche pour le correcteur.
- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- L'usage des **calculatrices est autorisé**.

AUTOUR DE LA GUITARE

1 Comment accorder une guitare

A. Recherche des solutions en ondes stationnaires

On considère une corde homogène initialement au repos et confondue avec l'axe Ox, inélastique, de masse linéique μ (masse par unité de longueur), tendue par une tension pratiquement uniforme et constante T (en N). La corde est tendue par une masse par l'intermédiaire d'une poulie. La corde est fixée au point O et un guidage impose $y = 0$ à chaque instant à l'abscisse $x = L$.
On étudie les petits mouvements transversaux de la corde dans le plan xOy, autour de la position d'équilibre.
L'élongation transversale à l'instant t du point M d'abscisse x est notée $y(x,t)$.

1. Une étude de l'équation d'onde (non demandée) montre que l'on peut chercher les fonctions $y(x,t)$ sous la forme suivante, avec $k = \frac{\omega}{c}$:

$$y(x,t) = y_0 \sin(kx + \varphi_1) \sin(\omega t + \varphi_2)$$

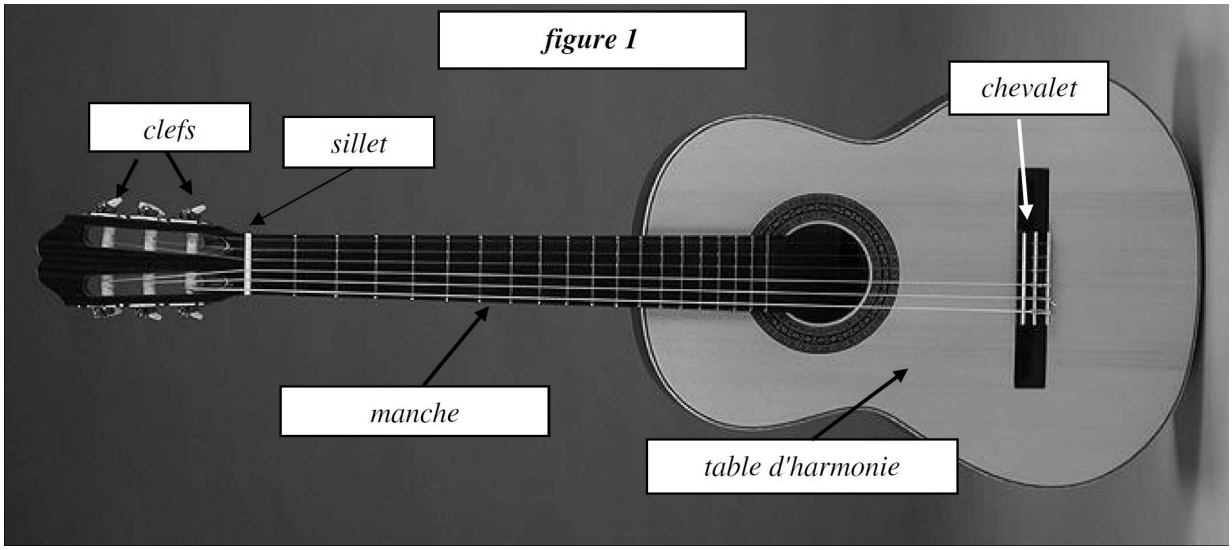
Q1 (a) Quelle est le nom de la constante k ? Donner sa dimension puis son unité. Justifier.
Q2 (b) Donner la relation entre k et λ la période spatiale de l'onde. Justifier.
Q3 (c) Que peut-on dire de l'élongation aux points $x = 0$ et $x = L$ à chaque instant ?
(d) En déduire que k ne peut prendre qu'une série de valeur discrètes k_n, appelées valeurs propres.
Q4 Définir n.
Q5 (e) En déduire l'expression de L en fonction de λ_n.
Q6 (f) Exprimer la fréquence propre f_n en fonction de c et L.

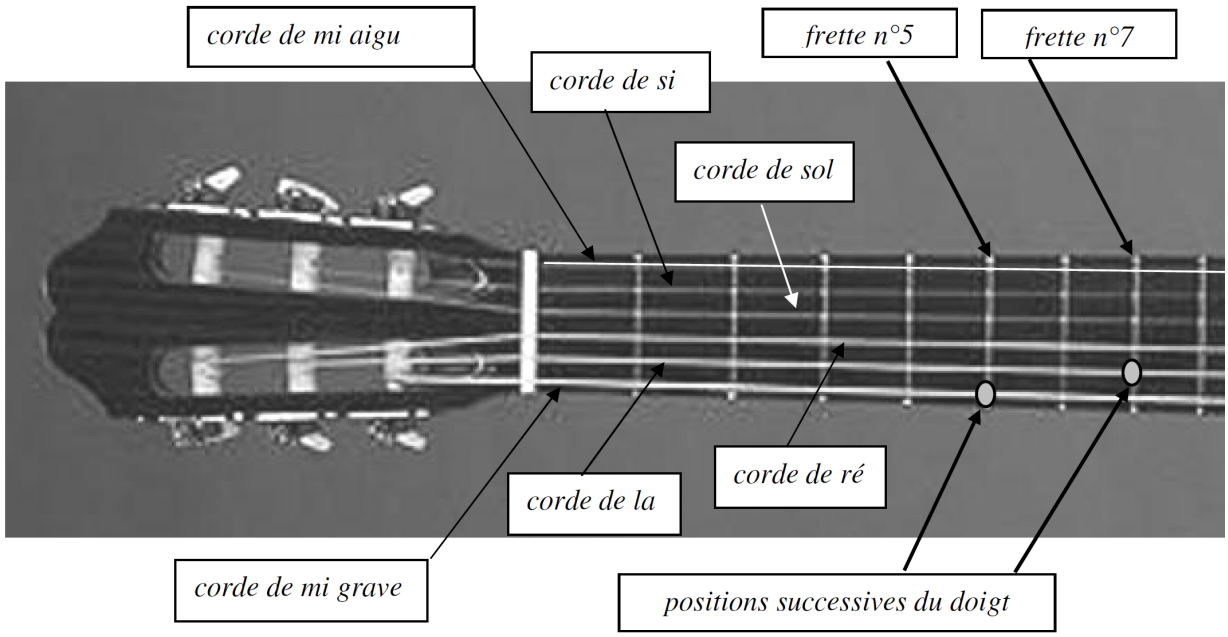
2. À chaque valeur de f_n correspond un mode propre. Le mode $n = 1$ (correspondant à la plus petite fréquence non nulle définie ci-dessus) est appelé mode fondamental. Les modes correspondant à n supérieur à 1 sont les harmoniques.
Q7 Exprimer l'élongation $y_n(x, t)$ du mode d'indice n avec les variables n, c, L et φ_2.
Donner une représentation graphique de la corde en mouvement (à un instant donné) pour le fondamental et les deux premiers harmoniques. Montrer la position des noeuds et des ventres.

Q8 3. Proposer une expérience permettant de mesurer les fréquences propres d'une corde.

B. Application à une corde de guitare

Les frettes placées le long du manche d'une guitare permettent au musicien de modifier la hauteur du son produit par la corde. En pressant la corde contre une frette, il diminue sa longueur, provoquant une augmentation de la fréquence fondamentale de la vibration de la corde.





Q9 1. À l'aide de la partie précédente, donner la fréquence de vibration fondamentale d'une corde de longueur L le long de laquelle les ondes se propagent à la célérité c.

Q10 2. La note monte d'un demi-ton lorsque la fréquence est multipliée par $2^{1/12}$. Pour cela, comment faut-il modifier la longueur de la corde ?

Q11 3. En plaçant le doigt sur les frettes successives, on monte chaque fois la note d'un demi-ton. Combien de frettes peut-il y avoir au maximum, sachant que la distance d entre la dernière frette et le point d'accrochage de la corde doit être supérieure à $\frac{L}{4}$?

4. On cherche la formule de la célérité c de propagation de l'onde le long de la corde. Une étude qualitative montre qu'elle peut s'écrire sous la forme $c = A.m^{\alpha}.L^{\beta}.T^{\gamma}$, avec A une constante sans

dimension, m la masse de la corde, L sa longueur et T la tension de la corde (*i.e.* la force avec laquelle elle est tendue).

(a) Déterminer α, β, et γ par analyse dimensionnelle.

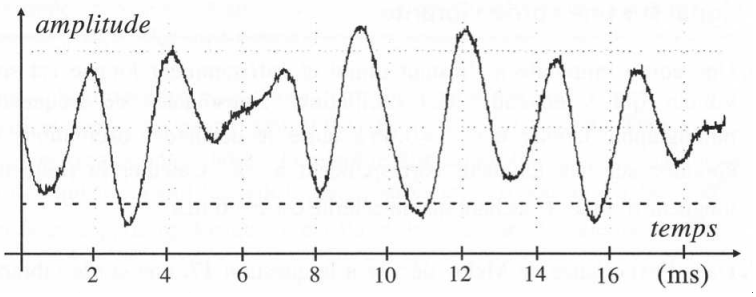
Q12 On donne $A = 1$, conclure en donnant la formule finale de la célérité c en fonction de T et de la masse linéique μ de la corde.

Q13 (b) Calculer la tension T de la corde mi_3 dont la fréquence fondamentale est $f_1 = 330$ Hz. On donne la longueur de la corde $L = 63$ cm et sa masse linéique $\mu = 0{,}55$ g.m^{-1}.

C. Étude spectrale d'un son

Dans l'enregistrement du son produit par une guitare au moyen d'un microphone et d'un amplificateur, c'est la tension produite par l'amplificateur qui est en fait enregistrée. Dans l'étude ci-dessous, la corde de mi_1 (de fréquence 82,4 Hz) est frappée près du chevalet.

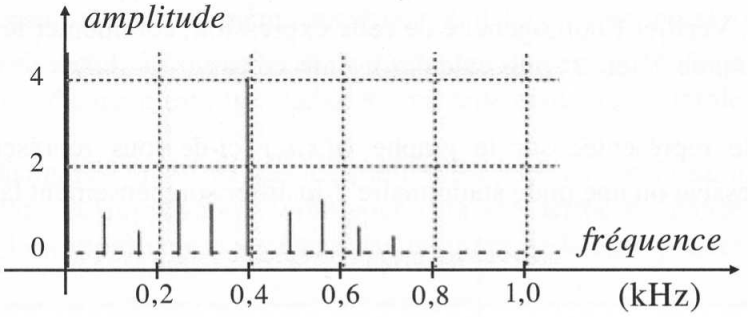
1. Le premier enregistrement concerne la courbe d'amplitude du signal en fonction du temps.



Q14 (a) Comment peut-on décrire ce signal ? Est-ce un signal sinusoïdal ?

Q15 (b) Évaluer la fréquence principale qui correspond à la composante de plus grande amplitude.

2. Le second enregistrement est une analyse spectrale du signal précédent.



Q16 (a) Comme s'appelle l'opération mathématique qui permet d'obtenir le spectre du signal ?

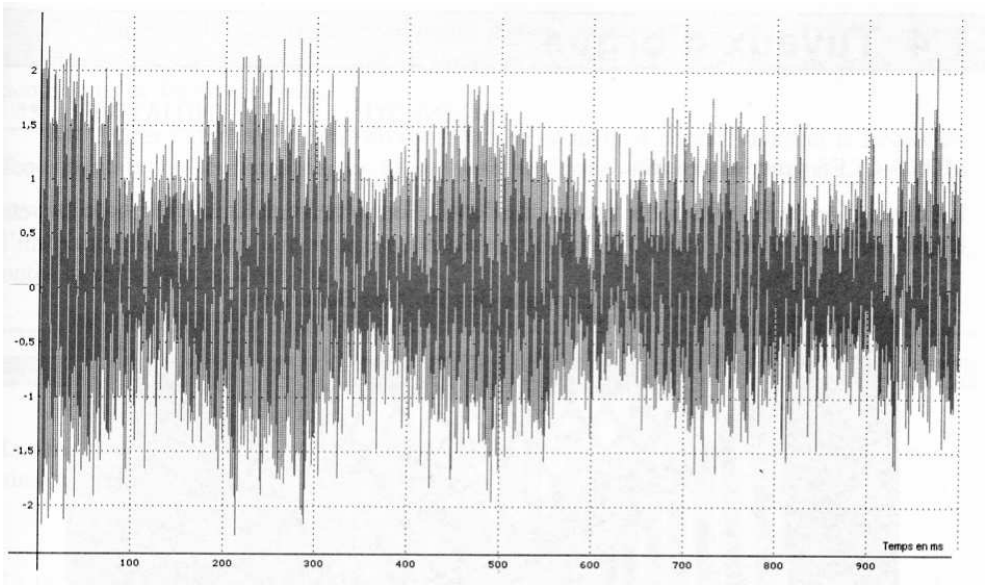
(b) Décrire le spectre. Est-il en accord avec la fréquence calculée précédemment à la question

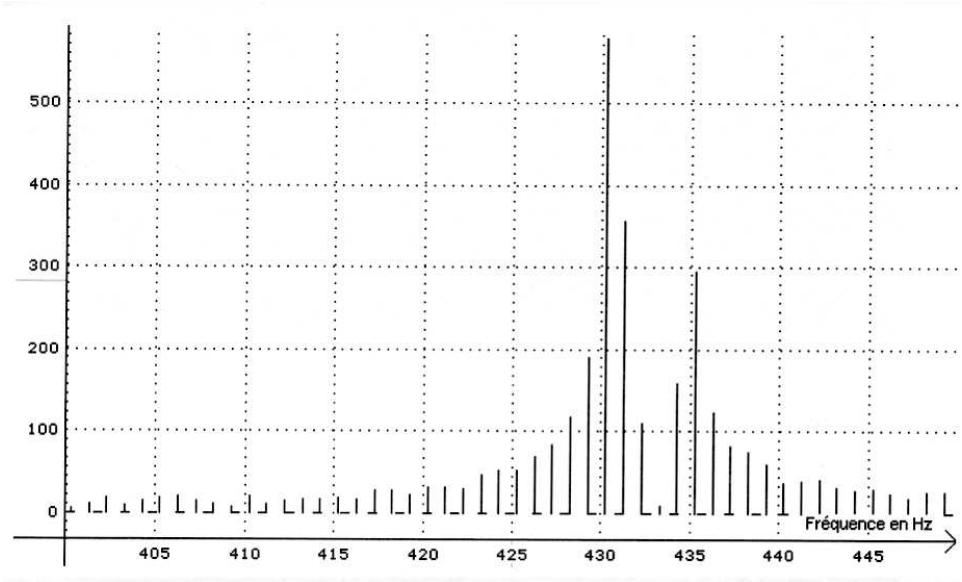
Q17 1b) ?

Q18 (c) Comment s'y prend le guitariste pour jouer d'autres notes sur cette même corde ?

3. On se propose d'illustrer un moyen commode pour accorder les cordes entre elles en prenant l'exemple de l'accordage de la corde $ré_2$, à partir de la corde la_1. Le guitariste s'arrange pour jouer la « même »note sur ces deux cordes (il place ses doigts et pince les cordes comme il faut, les explications ne sont pas nécessaires ici). Ensuite, il règle la tension de la corde $ré_2$ de manière à ce que les deux cordes produisent la même note.

Les figures suivantes représentent la tension délivrée par un microphone (en V) en fonction du temps (un carreau correspond à 100 ms) ainsi que le spectre du signal lors d'un essai d'accordage des cordes la_1 et $ré_2$ par la méthode précédente.





(a) Comment s'appelle le phénomène observé ? De quelle façon se manifeste-t-il dans le son entendu par l'oreille ?

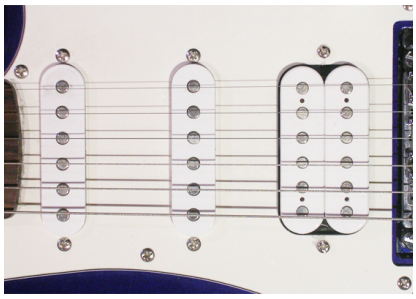
Q19

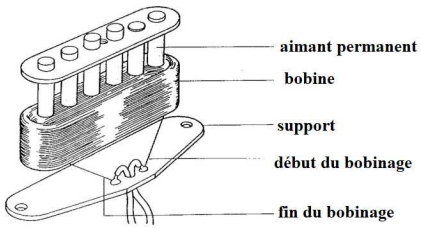
Q20 (b) Montrer que les deux graphiques expérimentaux sont compatibles **de manière quantitative**.

Q21 (c) Comment doit-on alors procéder pour accorder les cordes entre elles ?

2 Microphone de guitare

Une guitare électrique se distingue d'une guitare classique par l'absence de caisse de résonance. Comme la vibration des cordes métalliques est très inefficacement transformée en onde acoustique, celle-ci est directement convertie en un signal électrique grâce à un transducteur électromagnétique : le micro. Apparus au début du XXe siècle, les micros de guitares électriques ont la particularité de restituer la vibration des cordes sans entendre le son que ces dernières produisent.

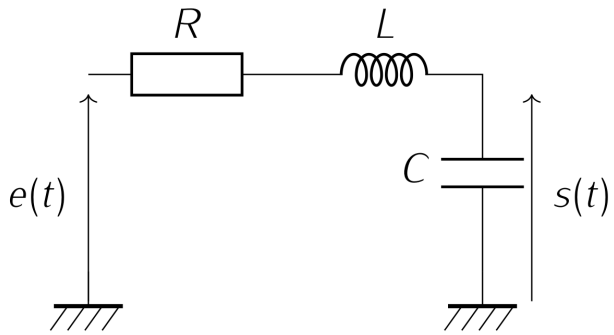




Un micro de guitare est constitué d'un ou de plusieurs aimants permanents entourés d'une bobine. Les aimants produisent un champ magnétique. Les cordes sont faites d'un matériau ferromagnétique. En vibrant, celles-ci modifient le champ magnétique créé par les aimants ce qui provoque l'apparition d'une force électromotrice dans la bobine grâce au phénomène d'induction que l'on étudiera à la fin de l'année.

A. Aspect électrique

D'un point de vue électrique, le micro se modélise par un RLC série de la façon suivante :



$e(t)$ est la tension induite par le mouvement de la corde. L désigne l'inductance propre du bobinage et R sa résistance. De plus, le grand nombre de spires présentes dans le bobinage provoque un effet capacitif représenté par le condensateur C. On étudie ce circuit en régime sinusoïdal forcée avec $e(t) = E\cos(\omega t)$

1. Étude asymptotique :

Q22 (a) Tracer le schéma équivalent du circuit en basses fréquences. Que vaut la tension s aux bornes du condensateur ?

Q23 (b) Tracer le schéma équivalent du circuit en hautes fréquences. Que vaut la tension s ?

Q24 2. Donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{S}$ de la tension s en fonction de R, L, C, ω et E.

Q25 3. L'écrire sous la forme $\underline{S} = \frac{E}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$ et exprimer les paramètres ω_0 et Q en fonction de R, L et C.

Q26 4. Montrer que, si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, il y a résonance à une pulsation ω_r à déterminer.

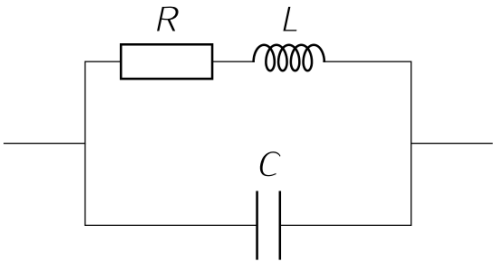
Q27 5. Tracer l'allure de $|\underline{S}|$ en fonction de ω dans le cas $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

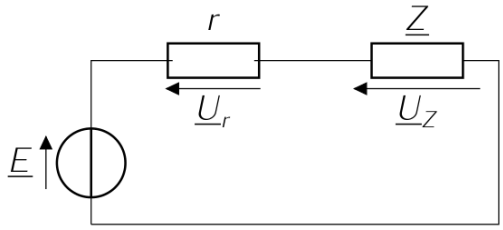
Q28 6. Proposer un protocole expérimental pour tracer expérimentalement l'allure de $|\underline{S}|$ en fonction de ω pour un circuit RLC série alimenté par un GBF.

Q29 7. **Question non guidée** Un potentiomètre de résistance r est traditionnellement ajouté en parallèle de la capacité C. Donner l'expression littérale du nouveau gain statique (*i.e.* $\frac{|S|}{E}$ pour une fréquence nulle) du circuit en présence de ce potentiomètre. Ce dernier est accessible pour le guitariste. Quelle est son utilité ?

B. Mesures expérimentales

On souhaite mesurer les paramètres R, L et C de deux micros différents : le micro **Fender Lace Sensor** et le micro **De Armond Dynasonic**.
En pratique, il est très compliquée de contrôler la tension $e(t)$ puisque celle-ci est générée par la vibration de la corde.
En l'absence de vibration de la corde, le micro est modélisé par le dipôle, d'impédance $\underline{Z}$, représenté ci-dessous à gauche :



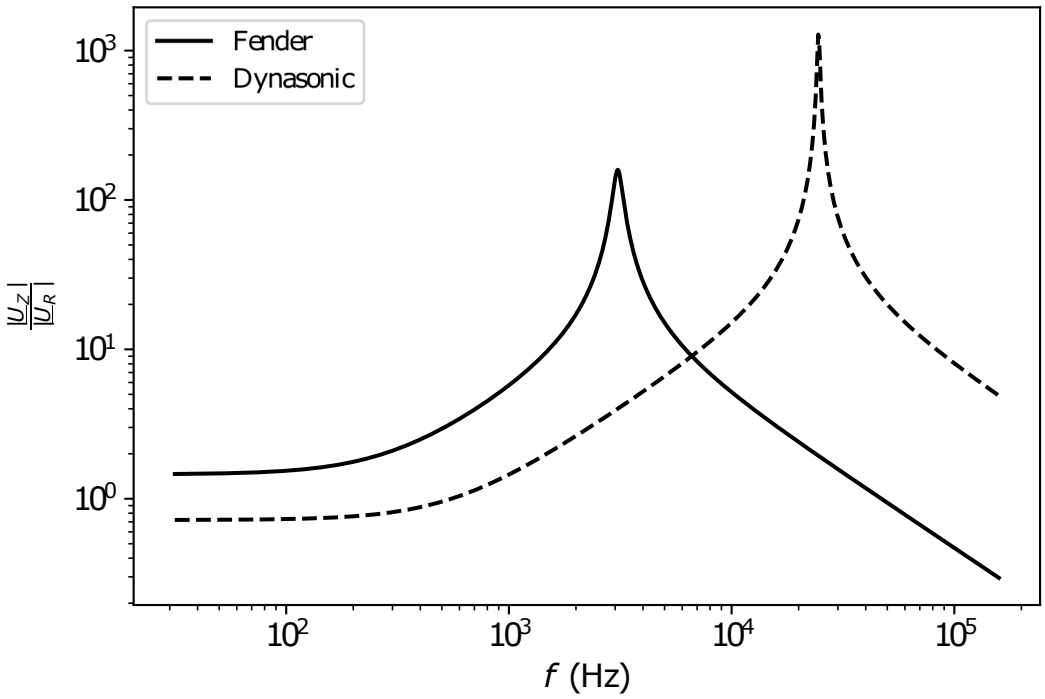


On réalise le montage ci-dessus à droite, dans lequel e est une source de tension idéale, délivrant une tension sinusoïdale de la forme : $e(t) = E\cos(\omega t)$.
r est un résistor de résistance $r = 10$ kΩ.

Q30 8. Exprimer $\underline{Z}$, l'impédance du micro orienté en convention récepteur, en fonction de R, L, C et ω.

Q31 9. Montrer que $\underline{Z} = r\frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}_r}$.

10. Le graphe ci-dessous représente $\frac{|\underline{U}_Z|}{|\underline{U}_r|}$ en fonction de la pulsation ω pour les deux micros étudiés : trait plein pour le le micro **Fender** et pointillés pour micro **Dynasonic**.



Q32 Montrer qu'en basses fréquences $\underline{Z} \simeq R$ et en déduire la valeur de R pour chaque micro.

11. Les relevés expérimentaux mettent en évidence que pour des fréquences de l'ordre de 1 kHz, $\underline{Z}$ est
Q33 dominée par R et L (on peut donc négliger les termes en $\frac{1}{j\omega C}$). Montrer que pour ces fréquences $L \simeq \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(r\frac{|\underline{U}_Z|}{|\underline{U}_R|}\right)^2 - R^2}$. En déduire la valeur de L pour chaque micro.

Q34 12. $\underline{Z}$ peut s'écrire sous la forme $\underline{Z} = R\frac{1+jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$. Simplifier l'expression de $\underline{Z}$ dans l'hypothèse $Q \gg 1$ et ω proche de ω_0. Expliquer comment évaluer C à partir des relevés expérimentaux. En déduire la valeur de C pour chaque micro.

Q35 13. **Question non guidée** Justifier, à partir des mesures expérimentales et des résultats de la partie précédente, l'affirmation suivante : "Le micro Fender sonne plus aigu que le micro Dynasonic".

AUTOUR DE LA GUITARE

1 Comment accorder une guitare

A. Recherche des solutions en ondes stationnaires

Q1 1. (a) k est appelé vecteur d'onde. La dimension de l'argument du sinus est 1 (et son unité est le radian) donc $[kx] = 1$ or $[x] = L$ d'où $\boxed{[k] = L^{-1}}$. Avec le même raisonnement pour l'unité, on a $\boxed{\text{unité de } k = \text{rad.m}^{-1}}$ (ou tout autre unité d'angle divisé par une unité de longueur).

(b) Si λ est la période spatiale de l'onde, on doit avoir $\forall x \backslash y(x,t) = y(x+\lambda,t)$ soit $\sin(kx+\varphi_1) = \sin[k(x+\lambda)+\varphi_1]$ d'où $k\lambda = 2\pi \times n$ avec n un entier. Le $\forall x$ permet d'exclure l'autre condition d'égalité de deux sinus : $kx + k\lambda + \varphi_1 = \pi - kx - \varphi_1$ ne peut pas être vérifiée quelque soit x. On en déduit $k\lambda = 2\pi$ (car λ est le plus petit réel positif permettant de vérifier cette relation)

Q2 $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$

Q3 (c) La corde est fixe en ses deux extrémités donc $\boxed{y(0) = y(L) = 0}$ pour tout t. L'élongation est donc $\boxed{\text{nulle}}$.

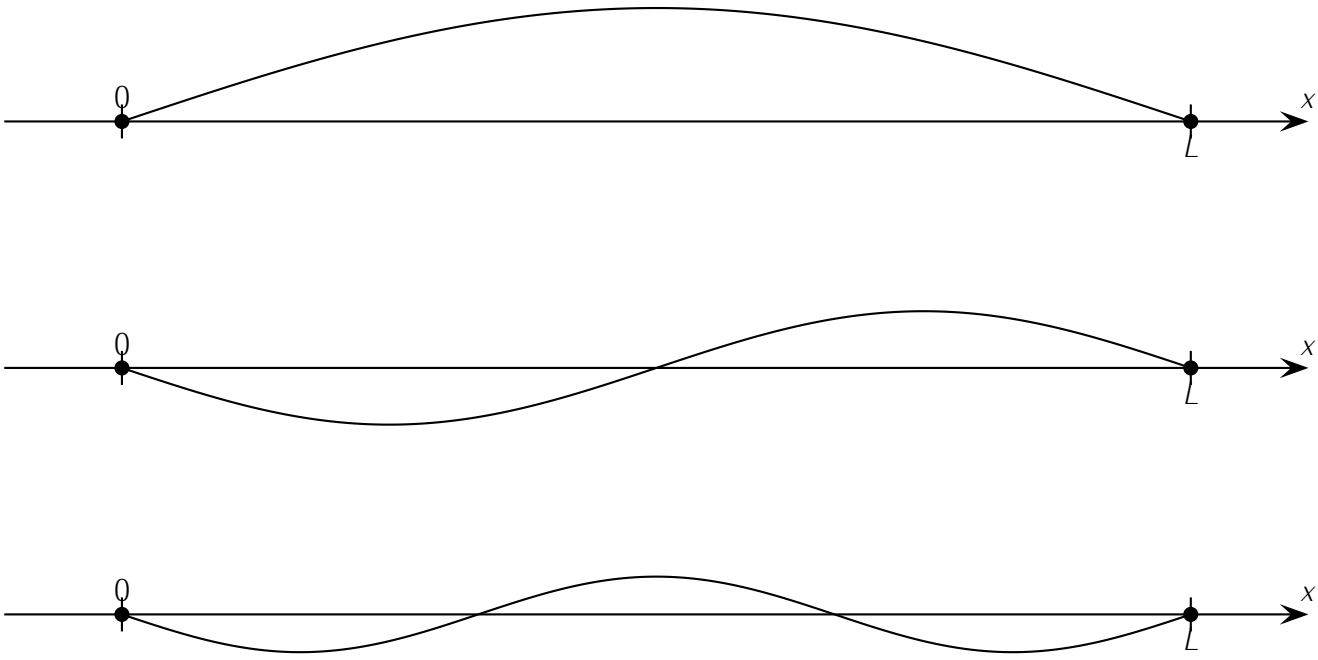
Q4 (d) La première condition impose $\sin(\varphi_1) = 0$ d'où $\varphi_1 = 0$. La deuxième condition donne $\sin(kL) = 0$ d'où $kL = n\pi$ avec n entier non nul (car ni k ni L ne sont nuls). D'où $\boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}}$.

Q5 (e) $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}$ $\boxed{L = \frac{n\lambda_n}{2}}$

Q6 (f) T la période spatiale satisfait $\omega T = 2\pi$ d'où $f_n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{kc}{2\pi}$ avec $\omega = kc$ d'où $\boxed{f_n = \frac{nc}{2L}}$.

2. $\boxed{y_n(x,t) = \sin(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{n\pi ct}{L} + \varphi_2)}$. L'allure de la corde pour le fondamental et les deux premiers

Q7 harmoniques est représentée ci-dessous :



3. Pour mesurer les fréquences propres d'une corde, on peut utiliser un vibreur de fréquence variable
Q8 fixé à une extrémité de la corde de longueur L. L'autre extrémité passe par une poulie et on attache un poids au bout de la corde pour fixer la tension par exemple.

On fait varier la fréquence du vibreur pour observer les différents modes : des faisceaux avec des nœuds et des ventres de grande amplitude. Les fréquences correspondantes sont les fréquences propres de la corde. Pour les autres fréquences, $\sin(kL) \neq 0$ et c'est donc y_0 qui vaut 0.

On peut éventuellement utiliser un stroboscope pour mesurer les fréquences à laquelle on excite la corde si la fréquences d'excitation n'est pas connue. Mais l'utilisation d'un stroboscope seule ne suffit pas à connaitre les modes propres de la corde, mais simplement la fréquence à laquelle le vibreur fonctionne. De plus, lorsque l'on voit une corde immobile, on ne sait pas si on est à la fréquence d'oscillation de la corde f ou à un sous multiple f/n avec n un entier. Cela demande donc des précautions.

Une autre solution serait d'exciter la corde en tapant dessus pour exciter tout les modes propres, puis de regarder la/les fréquences d'oscillations à l'aide d'un stroboscope (ou d'un micro). Puisque seuls les modes propres peuvent se propager, alors on pourra les déterminer. Un problème est que l'on excite différent modes propres de différentes fréquences : on ne verra pas facilement les harmoniques mais seulement le fondamental. De plus, les modes propres excités dépendent de la manière de frapper la corde.

B. Application à une corde de guitare

Q9 1. Pour le mode fondamental, nous avions $L = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f_1}$. D'où $\boxed{f_1 = \frac{c}{2L}}$

2. On note f' la nouvelle fréquence associée à L' la nouvelle longueur de corde (f et L étant les anciennes).

Q10 Pour monter la note d'un demi-ton : $f' = f \times 2^{1/12}$. Or la note est liée à la fréquence du fondamental, on peut donc utiliser le résultat de la question précédente : $f = \frac{c}{2L}$ et $f' = \frac{c}{2L'}$. On en déduit :
$f' = f \times 2^{1/12} \Rightarrow \frac{c}{2L'} = \frac{c}{2L} \times 2^{1/12}$.

Soit $\boxed{L' = L \times 2^{-1/12}}$

Il faut donc multiplier la longueur de la corde par $2^{-1/12}$ (soit raccourcir la corde).

3. En notant L_n la longueur de la corde lorsque l'on pince la n^e frette. On monte d'un demi-ton à chaque fois d'où $L_n = L_{n-1} \times 2^{-1/12}$. D'où par récurrence $L_p = L_0 \times (2^{-1/12})^p$ en notant L_0 la longueur totale (utile) de la corde lorsque l'on utilise pas les frettes.
On souhaite $L_p \geq \frac{L}{4} \Leftrightarrow L \times 2^{-p/12} \geq \frac{L}{4} \Leftrightarrow \ln(2^{-p/12}) \geq \ln\frac{1}{4}$
$\frac{-p}{12}\ln 2 \geq \ln\frac{1}{4} \Leftrightarrow p \leq \frac{-\ln 1/4}{\ln 2} \times 12 = 24$

Q11 Il y a $\boxed{\text{24 frettes au maximum}}$.

Rem : avec 24 frettes, on couvre une étendue de 2 octaves avec une corde (octave : intervalle séparant deux sons dont la fréquence fondamentale du plus aigu est le double de celle du plus grave). $f_{24} = f \times (2^{1/12})^{24} = 4f$

Q12 4. (a) Voir TP. On trouve $\boxed{c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$

(b) $T = \mu c^2 = \mu(\lambda f_1)^2 = \mu(2Lf_1)^2$ car $L = \lambda/2$.

Q13 A.N. : $T = 0{,}55.10^{-3} \times (2 \times 63.10^{-2} \times 330)^2$ $\boxed{T = 95\ \text{N}}$

C. Étude spectrale d'un son

Q14 1. (a) Le signal n'est pas « purement sinusoïdal » (il présente des irrégularités). Il est constitué

d'un fondamental et d'une série d'harmoniques d'amplitudes variables. La corde, jouée par le guitariste, ne vibre pas dans un mode unique mais dans une superposition de différents modes. Puisque la corde a été frappée très près du chevalet, le mode de plus grande amplitude n'est sans doute pas le fondamental.

(b) ***Attention, il est demandé le mode de plus grande amplitude, pas le fondamental ou la période du signal (ce qui revient au fondamental).***

Le signal étant malgré tout presque sinusoïdal (ou en tout cas sur certains intervals, il apparait un harmonique prépondérant : entre $t = 8\,\text{ms}$ et $t = 18\,\text{ms}$, on compte approximativement 4
Q15 périodes, soit $T \simeq 2{,}5$ ms, ce qui donne $\boxed{f \simeq 400\ \text{Hz}}$.

Comptez plusieurs périodes, expliquez où vous les avez prises. Prenez les dans une zone où le signal a l'air sinusoïdal.

Q16 2. (a) C'est la transformée de Fourier qui permet d'obtenir le spectre d'un signal temporel.

(b) On compte 9 harmoniques dans le spectre, celui le plus important n'est pas ici le fondamental mais le 5^e harmonique de fréquence légèrement inférieure à 400 Hz, ce qui est en accord avec
Q17 la question précédente.

Ces harmoniques sont régulièrement espacés ($f_n = nf_1$). $f_5 \simeq 400$ Hz conduit à $f_1 = 400/5 \simeq 80$ Hz, ce qui est bien en accord avec la donnée de l'énoncé pour la corde mi_1.

(c) Pour pouvoir jouer d'autres notes (cad changer la hauteur ou la fréquence de la note), comme
Q18 vu plus haut, le guitariste appuie sur une frette pour changer la longueur vibratoire de la corde. En effet, la note est reliée à la fréquence fondamental $f = \frac{c}{2L}$, ainsi la corde étant plus courte lorsque l'on pince une frette, la nouvelle note sera forcément plus aigüe.

La question est une question de physique et non de musique : justifier votre réponse à l'aide des résultats obtenus.

Q19 3. (a) On observe un phénomène de battements . A l'oreille, il se manifeste par une variation (ou modulation) dans le temps de l'amplitude du son entendu avec une période T_{batt}. Alternativement, les deux signaux issus de deux cordes vont être en phase (maximum local du signal total) puis en opposition de phase (minimum local du signal total).

Q20 (b) **Lecture de fréquences des deux principaux pics** sur le spectre : ils se situent à $f_1 \simeq 430$ Hz et $f_2 \simeq 435$ Hz (incertitude de l'ordre de 1 Hz). Cet écart doit donner des battements comme sur le signal enregistré.

Lecture sur le signal : la mesure de la période des battements donne $T_{batt} \simeq 240$ ms d'où une fréquence $f_{batt} \simeq 4{,}2$ Hz. Or d'après le cours, $f_{batt} = f_2 - f_1$. Cet écart est bien compatible avec les deux fréquences relevées sur le spectre.

Amplitude relatives : Sur les spectres, l'amplitude de la composante à f_1 est deux fois plus grande que celle à f_2. C'est en accord avec le signal où l'on a grossièrement $S_{max} \simeq 2$ V et $S_{min} \simeq 0{,}75$ V (difficile à lire à cause du bruit). On peut en déduire que les amplitudes des deux signaux sont de l'ordre de 1,4 V et 0,7 V, soit à peu près un facteur 2. Cela est cohérent avec le spectre où il y a à peu près un facteur 2 entre les amplitudes. On ne peut pas facilement comparer les valeurs exactes avec le spectres car les amplitudes obtenues sont peu précises (dû à l'élargissement des pics compte tenu de la fenêtre finie d'acquisition).

Enfin, l'existence des harmoniques introduit quelques déformations dans le signal. Cela donne un signal un peu déformé par rapport à celui vu en théorie pour deux signaux purs.

Remarque : il est impossible sur ce signal de mesurer la pseudo-fréquence en comptant les oscillations. De plus, il serait faux de dire que la pseudo-fréquence est la moyenne des fréquences puisque les amplitudes ne sont pas égales.

(c) Pour accorder les cordes, il faut tourner les clés pour changer la tension. Le but est d'obtenir la même fréquence, ainsi lorsque l'on tourne une clé, on peut savoir si on l'a tourné dans le bon sens en écoutant les battements : si la période des battements augmentent, alors c'est que la différence de fréquence diminue, on tourne dans le bon sens. Au contraire, si la période des battements diminue, c'est que les fréquences "s'éloignent" et on tourne dans le mauvais sens.

Lorsque l'on n'entend plus les battements parce que la période est devenue trop grande, c'est-à-dire lorsque l'on entend un son d'amplitude constante qui n'est plus modulée dans le temps, alors c'est que la différence de fréquence est nulle.

Remarque : les deux cordes ne seront pas accordées de manière absolue... mais juste accordées entre elles ! Cela permet déjà de rendre le son de la guitare harmonieux.

Q21

Ne dites pas juste que l'on fait disparaitre les battements, en effet si on désaccorde beaucoup les deux cordes, les battements disparaitront car la condition nécessaire pour les battements (2 fréquences proches) ne sera plus vérifier. Il faut expliquer dans quel sens tourner les clés.

2 Microphone de guitare

A. Aspect électrique

1. (a) En basses fréquences le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, et la bobine comme un fil, donc $s = e$.

   (b) En hautes fréquences, le condensateur se comporte comme un fil donc $s = 0$. *A priori*, il s'agit d'un filtre passe-bas.

2. Le théorème du diviseur de tension en régime sinusoïdal forcé donne : $\underline{S} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C+\underline{Z}_L+\underline{Z}_R}\underline{E}$. Avec, $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$, $\underline{Z}_L = jL\omega$ et $\underline{Z}_R = R$ d'où $\underline{S} = \frac{E}{1-LC\omega^2+jRC\omega}$.

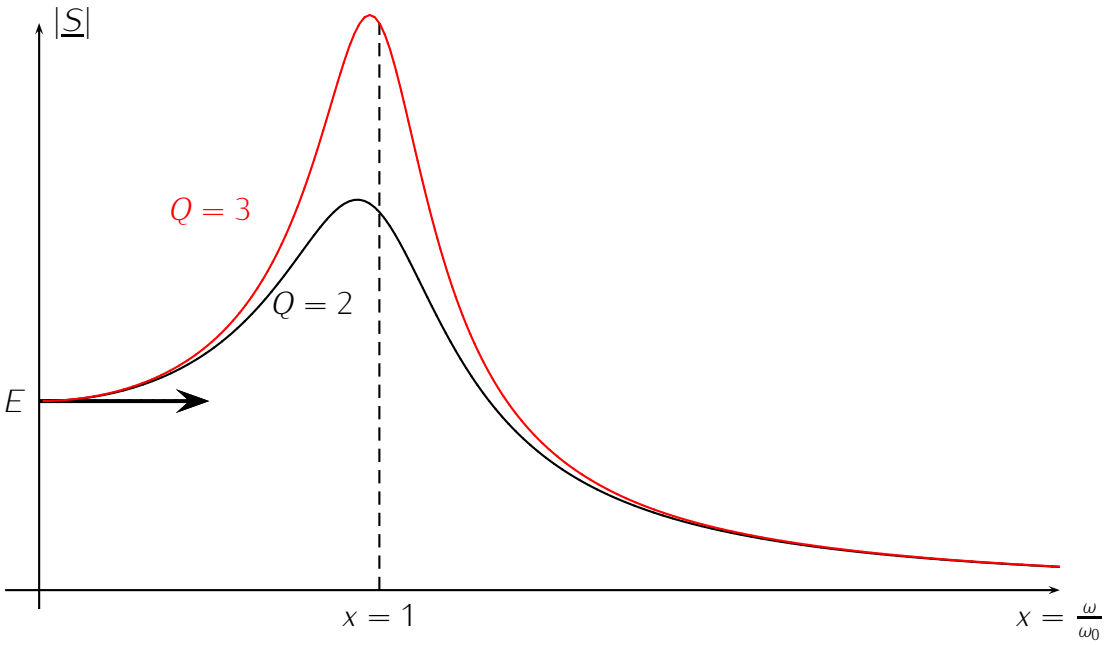
3. Par identification $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

4. Il y a résonance en tension aux bornes du condensateur si $|\underline{S}|$ admet un maximum pour $0 < \omega < +\infty$. $|\underline{S}| = \frac{E}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{\omega^2}{Q^2\omega^2}}}$. L'expression du numérateur est constante et la fonction racine carrée est strictement croissante donc $|\underline{S}|$ admet un maximum si $\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{\omega^2}{Q^2\omega^2}$ admet un maximum.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{\omega^2}{Q^2\omega^2}\right] = 4\frac{\omega}{\omega_0}\left[\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+\left(\frac{1}{Q^2}-1\right)\right]$$

   La première solution est $\omega = 0$ (tangente à l'origine horizontale). Une seconde solution, $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$, est possible à condition que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. L'amplitude de la tension s à l'allure suivante en fonction de la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$



6. Pour tracer expérimentalement l'amplitude de la tensio de sorte, on impose une tension $e(t)$ sinusoïdale, d'amplitude E que l'on garde constante tout au long de l'expérience, à l'aide d'un GBF.

   On mesure, à l'aide d'un multimètre ou d'un oscilloscope, les tensions aux bornes du GBF ainsi qu'à la sortie du filtre. Enfin, on relève le rapport des amplitudes de ces deux tensions pour différentes fréquences.

7. Le théorème du diviseur de tension appliqué au circuit en basse fréquences donne : $H_0 = \frac{r}{r+R}$. Le gain statique est diminué par la présence du potentiomètre, celui-ci sert à régler le volume de la guitare.

B. Mesures expérimentales

8. On a $\frac{1}{\underline{Z}} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega+R}$, ainsi $\underline{Z} = \frac{R+jL\omega}{jRC\omega+1-LC\omega^2}$.

9. Par définition $\underline{Z} = \frac{\underline{U_Z}}{\underline{I}}$, or d'après la loi d'Ohm $\underline{U}_r = r\underline{I}$, donc $\underline{Z} = r\frac{\underline{U_Z}}{\underline{U}_r}$.

10. Pour $\omega \to 0$ $\underline{Z} \to R$. On relève les valeurs de $\frac{|\underline{U_Z}|}{|\underline{U_R}|}$ sur les courbes et on trouve pour le micro Fender : $R = 15$ kΩ et pour le micro Dynasonic : $R = 7$ kΩ.

11. Dans la plage de fréquences indiquées $\underline{Z} \simeq R+jL\omega$, donc $|\underline{Z}|^2 = R^2+L^2\omega^2$ soit $\left(\frac{|\underline{U_Z}|}{|\underline{U_R}|}\right)^2 = \frac{R^2+L^2\omega^2}{r^2}$ et finalement $L = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(r\frac{|\underline{U_Z}|}{|\underline{U_R}|}\right)^2 - R^2}$. On se sert des relevés pour trouver : $L = 7{,}8$ H pour le micro Fender et $L = 2$ H pour le micro Dynasonic.

12. On a défini $RC = \frac{1}{Q\omega_0}$ donc $\underline{Z} = \frac{R+jL\omega}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{Q\omega_0}} = R\frac{1+jL/R\omega}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$ Soit $\underline{Z} = R\frac{1+jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$.

    Finalement, dans l'hypothèse $Q \gg 1$ et ω proche de ω_0 :

$$\underline{Z} \simeq \frac{jRQ}{\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}}$$

    $|\underline{Z}|$ est maximal pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. On trouve alors $C = 350$ pF pour le micro Fender, et $C = 21$ pF pour le micro Dynasonic.

13. On trouve $Q = 10$ pour le micro Fender et $Q = 40$ pour le micro Dynasonic. La pulsation de résonance en tension aux bornes du condensateur pour les deux micros est donc $\omega_r \simeq \omega_0$. La

fréquence de résonance du micro Dynasonic est donc plus élévée que celle du micro Fender. Cependant, la fréquence de résonance du micro Dynasonic valant environ 24 kHz et son facteur de qualité étant élévé, le gain du filtre reste quasiment constant sur tout le spectre audible (20 Hz à 20 kHz). En revanche, le micro Fender présente une résonance vers 3 kHz, qui amplifie les sons aigus.