

## Corrigé du devoir surveillé n ° 7

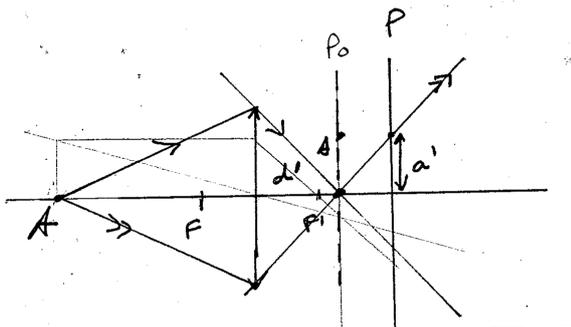
**Problème I : Modélisation : principe de la méthode de l'autofocus****II.1 Mise au point**

Q1. Il suffit d'appliquer la relation de conjugaison en faisant attention à l'algébrisation de la formule, soit  $\frac{1}{d'} - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{f'_0}$ , d'où  $d' = \frac{x_0 f'_0}{x_0 + f'_0} = 10,5$  cm.

La formule du grandissement permet d'accéder à la taille de l'image (on met une valeur absolue car le grandissement est négatif ici) :  $h' = \left| \frac{d'}{x_0} \right| h = 0,52$  cm

Q2. Le schéma demandé est donné ci-après (il faut prendre des rayons auxiliaires pour déterminer la position  $A'$  de l'image de  $A$ ).

La relation de Thalès, en valeur absolue donne alors facilement  $\frac{a'}{\delta} = \frac{a}{d'}$ , soit  $a' = a \frac{\delta}{d'} = \frac{a\delta(x_0 + f'_0)}{x_0 f'_0} = 0,24$  cm.



Q3. On va faire l'hypothèse que les pixels sont carrés, de côté  $b$  et en nombre  $N$  sur la surface  $S$ . On a donc  $Nb^2 = S$ , soit  $b = \sqrt{\frac{S}{N}} = 10$   $\mu\text{m}$ .

La condition pour avoir une image nette est que le rayon de la tâche  $a'$  soit inférieur à la moitié de la taille d'un pixel, soit  $a' < b/2$ , ou encore  $\delta < \frac{bd'}{2a} = 1,05$   $\mu\text{m}$  ! La marge de manoeuvre est vraiment faible !

**II.2 Principe simplifié de l'auto focus**

Q4. Par la relation de conjugaison de Descartes comme précédemment il vient  $d = \frac{f' d_0}{d_0 - f'}$ .

Q5. Si  $A$  est sur  $(P)$  c'est qu'il est en  $O$ . Par ailleurs comme  $(P_1)$  est conjugué avec  $(P)$ , l'image de  $A$  sera aussi sur  $(P_1)$  ! Il suffit donc de tracer le rayon issu de  $O$  passant par  $(O_1)$  et de déterminer son intersection avec  $(P_1)$  pour déterminer  $A_1$ , ce qui est représenté sur la figure suivante.

Par stigmatisme les rayons issus de  $A = O$  passant par les bords de la lentille convergent vers  $A_1$  après l'avoir traversée.

$F'_1$  se détermine alors facilement par l'intersection du rayon arrivant parallèlement à l'axe optique et passant par le bas de la lentille, après traversée de cette dernière et de l'axe optique de la lentille  $L_1$ .

Tout est représenté sur la figure suivante.

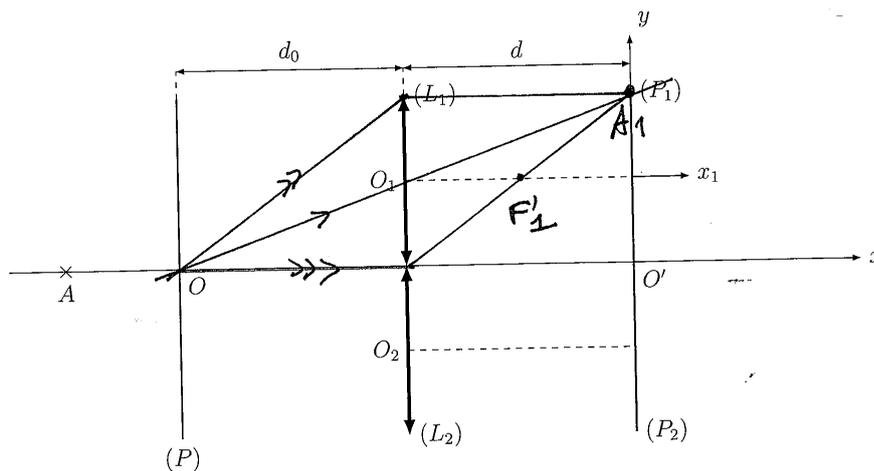
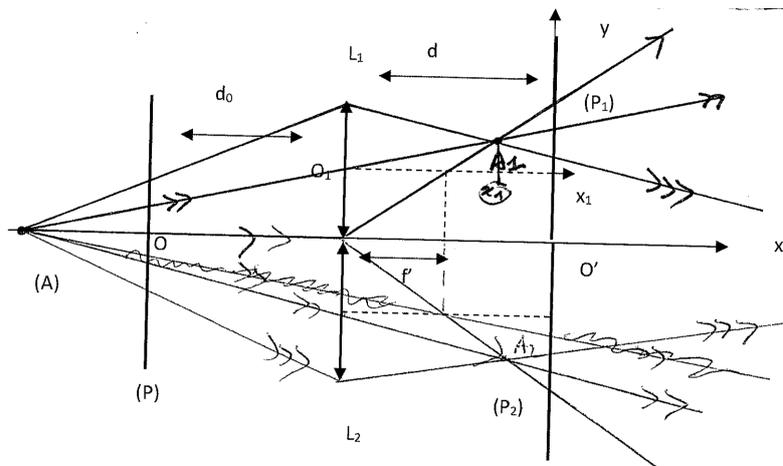


FIGURE 3 – Principe des lentilles de l'auto-focus

- Q6. L'utilisation des triangles semblables permet facilement d'obtenir une des trois relations suivante :  $y_1 = \frac{ad}{f'} = \frac{ad_0}{d_0 - f'} = a \left( 1 + \frac{d}{d_0} \right)$ .  
 Par symétrie  $y_2 = -y_1$ .
- Q7. Il vient donc facilement  $\Delta\Phi_0 = 2y_1 = 2a \left( 1 + \frac{d}{d_0} \right)$ .
- Q8. Aucune difficulté pour construire l'image  $A_1$  par les techniques habituelles.



Comme précédemment on peut écrire par utilisation de triangles semblables :  $y_1 = a \times \frac{x_1}{f'}$ .

Or par conjugaison  $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{p - d_0} = \frac{1}{f'}$ , d'où  $y_1 = ax_1 \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{p - d_0} \right) = a \left( 1 - \frac{x_1}{p - d_0} \right)$ .

- Q9. Les rayons passant par les bords convergent vers l'image  $A_i$  correspondante après la lentille  $L_i$  d'où les tracés sur la figure.
- Q10. Toujours par des considérations géométriques (triangles semblables) il vient  $y_s = y_1 \times \frac{d}{x_1}$ .  
 On a de même  $\frac{d - x_1}{x_1} = \frac{y_s - y_i}{2a}$ , ce qui donne directement le résultat attendu  $y_i = 2a \left( 1 - \frac{d}{x_1} \right) + \frac{dy_1}{x_1}$ .
- Q11. Par simple symétrie : le point supérieur de la tache sur  $(P_2)$  est le symétrique du point inférieur de la tache sur  $(P_1)$ , d'où  $y_i = -y_s$  !  
 Dès lors  $\Delta\Phi = y_s + y_i = y_1 \times \frac{d}{x_1} + 2a \left( 1 - \frac{d}{x_1} \right) + \frac{dy_1}{x_1} = 2a + 2 \frac{d}{x_1} (y_1 - a)$ .

Or  $y_1 - a = \frac{x_1}{d_0 - p}$ , d'où par substitution le résultat attendu.

Q12. Il vient par un calcul direct  $\Delta^2\Phi = 2ad \left( \frac{1}{d_0 - p} - \frac{1}{d_0} \right)$ .

Q13. En inversant la formule précédente il vient  $p = d_0 - \frac{1}{\frac{\Delta^2\Phi}{2ad} + \frac{1}{d_0}} = 1,98 \text{ cm} > 0$ .

Comme cette valeur est positive l'écran est à gauche de  $A$ . Il faut le déplacer vers la droite.

## Problème II D'après Banque PT Physique A 2016 Partie D

### D.1 Système interférentiel à deux fentes

D.1.1. La difficulté est de bien comprendre ce que représente  $\varphi$ ... C'est le retard de phase du rayon passant par le trou  $F_2$  par rapport à un rayon passant par le milieu des deux trous ! Et les deux trous sont distants de  $2a$ ... Il y a plein de points de vigilance...

Par symétrie les deux rayons sont en phase en  $F_1$  et  $F_2$ . Le déphasage est donc localisé après le plan des trous.

En imaginant une source en  $M$  envoyant des rayons en sens inverse de celui suivi par la lumière on peut affirmer que les plans d'onde pour cette source imaginaire sont des plans perpendiculaires aux rayons lumineux entre le plan des trous et la deuxième lentille. Un calcul élémentaire classique montre alors que la différence de marche entre  $F_1M$  (ou  $F_2M$ ) et le rayon fictif de la figure est en valeur absolue  $a \sin \alpha \simeq a\alpha$ , avec  $\alpha$  l'angle que fait le rayon passant par le centre de la lentille et arrivant en  $M$ , avec l'axe optique. Comme on a utilisé le stigmatisme de la lentille c'est qu'on était dans les conditions de Gauss et que l'angle  $\alpha$  est très petit devant 1 radian. Dès lors on a  $\tan \alpha \simeq \alpha = \frac{|z|}{f'}$ , soit la différence de marche (rappel entre un trou passant par  $F_1$  ou  $F_2$  et celui passant par le milieu des trous)  $|\delta| = \frac{a|z|}{f'}$ .

Enfin il est clair que le rayon passant par  $F_1$  est en avance de phase sur le rayon fictif (passant par le milieu des trous) et qu'au contraire celui passant par  $F_2$  est en retard si  $z > 0$ . On a donc  $\varphi = +\frac{2\pi}{\lambda} \frac{az}{f'}$ .

D.1.2. Les deux ondes sont cohérentes car issues d'une même source. D'après la formule de Fresnel des interférences à deux ondes de même amplitude déphasées de  $2\varphi$  on a directement

$$E = 2E_0 (1 + \cos(2\varphi))$$

L'allure de la courbe est une sinusoïde de valeur moyenne  $2E_0$ , variant entre 0 et  $4E_0$  de période  $\pi$ .

### D.2 Système interférentiel à trois fentes

D.2.1.

D.2.1.1 Il faut cette fois, comme il y a trois ondes, faire le calcul complet. On a l'amplitude complexe totale en  $M$  donnée par  $\underline{s} = s_0 (e^{j\varphi} + 1 + e^{-j\varphi}) = s_0 (1 + 2 \cos \varphi)$ .

Dès lors l'éclairement est effectivement bien  $\frac{1}{2} k s \underline{s}^* = E_0 (1 + 2 \cos \varphi)^2$  avec  $E_0 = \frac{1}{2} k s_0^2$ .

D.2.1.2 Les valeurs du tableau sont dans cet ordre : 9, 0, 1, 0, 9, qui correspondent soit à des extrema, soit à des annulations.

D.2.1.3 L'allure est facile à tracer : on trace d'abord  $(1 + 2 \cos \varphi)$  qui est une sinusoïde de valeur moyenne égale à 1 et d'amplitude 2, qui varie donc entre  $-1$  et  $3$ , avec une période de  $2\pi$ . On met ensuite suite cette fonction au carré, ce qui l'a fait varier entre

0 et 9, et l'ancien minimum en  $\pi$  qui valait -1 devient un maximum secondaire valant cette fois +1.

Remarque pour les MP\*! par ailleurs d'après la fonction réseau pour  $N = 3$  qui s'applique ici on savait à quoi s'attendre.

### D.2.2.

D.2.2.1 Il suffit de reprendre le calcul précédent en remplaçant le 1 correspondant à l'amplitude du rayon passant par  $F_0$  par  $-j$  (pour traduire le retard de phase de  $\pi/2$ ). L'amplitude totale en  $M$  est alors donnée par  $\underline{s} = s_0 (e^{j\varphi} - j + e^{-j\varphi}) = s_0 (2 \cos \varphi - j)$ .

On en déduit l'éclairement  $\frac{1}{2} k s s^* = E_0 (2 \cos \varphi - j) (2 \cos \varphi + j) = E_0 (4 \cos^2 \varphi - j^2) = E_0 (1 + 4 \cos^2 \varphi) = E_0 (3 + 2 \cos 2\varphi)$ .

Le graphe est celui d'une sinusoïde de valeur moyenne  $3E_0$ , qui varie entre  $E_0$  et  $5E_0$  avec une période  $\pi$ .

On a donc bien une alternance régulière de franges sombres et franges brillantes, de contraste  $\mathcal{C} = \frac{5-1}{5+1} = \frac{2}{3} = 0,66$ , ce qui fait qu'on arrive effectivement à les distinguer.

La période spatiale est celle de  $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{2az}{f'}\right)$ , i.e.  $i = \frac{\lambda f'}{2a}$ .

D.2.2.2 Il faut que la différence des chemins optiques, avec et sans la lame, à savoir  $(n-1)e$  soit égale à  $\lambda/4$ . On a donc  $\lambda = 4(n-1)e = 600$  nm, ce qui est dans le domaine visible.

D.2.2.3 En  $O'$  le retard de phase du rayon central avec la lame, en prenant comme origine  $O$  pour le même rayon sans la lame est  $\frac{2\pi}{\lambda} (x + e(n-1))$ .

Il manque une hypothèse dans l'énoncé : les fentes doivent être placées dans le plan focal objet de la lentille, ce que suggère le schéma avec des rayons issus des fentes et qui ressortent quasiment parallèles entre-eux après la lentille... Si ce n'est pas le cas on peut faire un calcul approché mais qui sera d'autant plus faux que les fentes sont éloignées du plan focal objet. On se place dans cette hypothèse pour la suite (celle des fentes placées dans le plan focal).

Pour calculer le retard de phase pour le rayon  $F_1 O'$  on peut dans un premier temps projeter  $O$  orthogonalement sur le segment de ce rayon après la lentille. On note  $I$  le point correspondant. Par le théorème de Malus  $O$  et  $I$  sont en phase, donc le retard de phase en  $I$  est nul. On a vérifié alors facilement que le retard de phase en  $O'$  est  $\frac{2\pi}{\lambda} (IO') = \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \alpha$ .

Les rayons seront en phase si donc  $\frac{2\pi}{\lambda} (x + e(n-1)) = \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \alpha$ , soit  $x + e(n-1) = x \cos \alpha$ . On en déduit  $x = \frac{e(n-1)}{\cos \alpha - 1} \simeq -\frac{2e(n-1)}{\alpha^2}$ , en utilisant l'approximation  $\cos \alpha \simeq 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ .

On trouve alors  $e = -\frac{x\alpha^2}{2(n-1)f'^2} = \frac{1.10^{-2} \cdot 1.10^{-8}}{2 \times 0.5 \times 1.10^{-2}} = 10$  nm !!

D.2.3. C'est une question sur les calculs d'incertitudes... Comme les dates ne sont connues que par les années Frits Zernike a pu avoir son Nobel à 64 ou 65 ans. On peut même affirmer qu'il l'a eu à 65 ans à 1 an près... On peut prolonger en supposant une répartition uniforme entre la date d'anniversaire et celle de l'attribution du Nobel, ce qui donnerait un âge de 64,5 ans avec une incertitude type de  $\frac{1 \text{ an}}{\sqrt{3}} = 7$  mois.

Si on veut pinailler ce résultat est à moduler du fait que le Nobel est en général annoncé début octobre...

## Problème III : Jean Perrin et l'hypothèse atomique

### I Équilibre vertical d'un gaz à température ambiante

- 1 Par exploitation de la loi des gaz parfaits avec  $T_0 = 288$  K et  $P_0 = 1.10^5$  Pa, on obtient  $V_m = \frac{RT_0}{P_0} = 23,9$  L/mol.

Le rapport demandé en notant  $n$  le nombre de moles dans le volume  $V$ , et  $N$  le nombre

de molécules est  $\frac{N \frac{4}{3} \pi R_m^3}{V} = \frac{4 \mathcal{N}_A \pi R_m^3}{3 V_m} \simeq 1.10^{-4} = 0,01\%$ .

- 2 Dans le modèle du gaz parfait les molécules sont supposées ponctuelles sans interaction entre-elles. Le rapport précédent laisse effectivement penser que pour ce gaz à température ambiante le modèle du gaz parfait est acceptable.
- 3  $E_{cm} = \frac{1}{2} m v^2$  et  $E_{pm} = m g z$  (en ne prenant en compte que la pesanteur).

L'agitation thermique permet d'expliquer la promotion de molécules vers le haut et le fait qu'elles ne sont pas toutes tassées au bas du récipient. On peut le vérifier en comparant l'énergie d'agitation thermique  $k_B T_0 = 4.10^{-21}$  J et l'énergie potentielle de pesanteur  $m g h = \frac{M}{\mathcal{N}_A g h} = 5.10^{-25}$  J pour une hauteur de 1 m. On a donc bien  $k_B T \gg m g h$ , même pour  $h$  de l'ordre de quelques mètres.

- 4 D'après l'équation d'état du gaz parfait appliqué à un volume mesoscopique sur lequel on suppose l'équilibre thermodynamique réalisé, il vient  $\rho(z) = \frac{M P(z)}{R T_0}$ .

Cf. cours pour établir  $-\frac{dP}{dz} - \rho g = 0$  puis  $-\frac{dP}{dz} + \frac{M g}{R T_0} P = 0$ .

- 5 La solution est immédiatement  $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$  avec  $H = \frac{R T_0}{M g} = \frac{k_B T_0}{m g} = 8,1.10^3$  m.

Sur une hauteur de  $h = 1$  m, on a  $(P_0 - P(z))/P_0 = 1 - \exp\left(-\frac{h}{H}\right) \simeq \frac{h}{H} \simeq 1.10^{-4}$ . Il faudrait donc un manomètre suffisamment précis pour détecter des variations de l'ordre de 10 Pa en mesurant la pression atmosphérique. Ce n'est pas le cas des manomètres usuels. Mais on peut le faire...

Dans le cas d'un liquide il y a deux différences (non étudiées en cours car pas au programme...). La première est que la masse volumique est environ 1000 fois plus grande et la deuxième que la masse volumique est quasiment constante. On a alors sur 1 m une chute de  $1000 * 9,81 * 1 \simeq 1.10^4$  Pa, soit un dixième de la pression atmosphérique, ce qui est parfaitement détectable!

- 6 De manière évidente  $E(z) = m g z$ . Il s'agit de l'énergie potentielle de pesanteur d'une molécule. Cette expression montre la compétition entre le désordre induit par l'agitation thermique et l'ordre induit par la recherche du minimum d'énergie potentielle.
- 7 Il vient  $c_g(z) = \frac{dn(z)}{d\tau}$  (on est obligé là aussi de travailler sur un volume mesoscopique  $d\tau$ ...), soit  $c_g(z) = \frac{P(z)}{R T_0} = \frac{P_0}{R T_0} A(z)$ , ce qui est attendu en posant  $c_{g0} = \frac{P_0}{R T_0}$ .

#### I.A Étude d'un équilibre de sédimentation

- 8 Un grain est soumis à son poids, à la poussée d'Archimède et à la force de viscosité de la part du fluide.
- 9 L'application du principe fondamental de la dynamique donne alors  $-V_b \mu_b \frac{dv}{dt} = -V_b \mu_b g +$

$V_b \mu_e g + \alpha v$ , qui se réécrit  $\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{\mu_b V_b} v = g \frac{\mu_b - \mu_e}{\mu_b}$ .

La solution est  $v(t) = v_\ell \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$  en posant  $\tau = \frac{\mu_b V_b}{\alpha} = \frac{m_b}{\alpha}$  et  $v_\ell = g \frac{(\mu_b - \mu_e) V_b}{\alpha}$ .

En régime permanent  $v$  atteint une vitesse limite  $v_\ell$ , ce qui est de la forme attendue en posant  $m^* = (\mu_b - \mu_e) V_b$ .

Dès l'équation initiale tout se passe comme si on pouvait ignorer la poussée d'Archimède et remplacer le poids par  $m^*g$ , d'où la dénomination de "masse apparente".

Numériquement  $\tau \simeq 9$  ns (le régime transitoire est vraiment très court à notre échelle!!), et  $v_\ell = 1,4 \cdot 10^{-8}$  m/s (chute très lente!!)

- 10 Il vient facilement  $\dim(j) = L^{-2} \cdot T^{-1}$ , puis  $\dim(D) = L^2 \cdot T^{-1}$ .

À l'équilibre il faut qu'il n'y ait plus de flux de particules, soit  $\vec{j}_c + \vec{j}_n = \vec{0}$ , soit  $-D \frac{dc}{dz} - cv_\ell = 0$ , ou encore  $\frac{dc}{dz} + \frac{v_\ell}{D} c = 0$ .

La résolution donne  $c(z) = c_0 \exp\left(-\frac{v_\ell}{D} z\right) = c_0 A(z)$  en posant  $H_b = \frac{D}{v_\ell} = \frac{D\alpha}{m^*g} = \frac{6\pi\eta R_b D}{m^*g}$ .

- 11 Il n'y a que le poids apparent qui soit une force conservative. Dès lors comme dans la première partie  $E(z) = m^*gz$ . La constante  $H$  associée sera donc  $H = \frac{k_b T_0}{m^*g}$ . Par identification avec  $H_b = \frac{6\pi\eta R_b D}{m^*g}$ , il vient  $D = \frac{k_b T_0}{6\pi\eta R_b}$ .

- 12 Dans une tranche de hauteur  $dz$ , de volume  $Sdz$  on trouve  $c(z)Sdz$  particules. On sommant entre 0 et  $h_1$  (d'ailleurs prise infinie d'après l'énoncé) on tombe sur le nombre total  $N$  de particules, soit  $N = \int_0^{+\infty} c(z)Sdz = H_b S c_0$ , soit  $c_0 = \frac{N}{H_b S}$ .

- 13 Il vient facilement  $c(z) = \frac{n(z)}{eS}$  car si  $e \ll H_b$  on peut considérer que la distribution de grain est uniforme sur une hauteur  $e$ .

On a alors  $n(z) = eSc(z) = eSc_0 \exp\left(-\frac{z}{H_b}\right)$ , d'où  $\ln(n(z)) = \ln(eSc_0) - \frac{z}{H_b}$ . Dans ce modèle le graphe de  $\ln n$  en fonction de  $z$  est celle d'une droite de pente négative, ce qui semble compatible avec les mesures expérimentales.

Numériquement on a donc  $H_b = \frac{1000}{24} = 41,66 \mu\text{m}$ .

On note que  $h_1 \simeq 2,5H_b$ , ce qui était nécessaire pour avoir une variation significative de  $n(z)$  avec l'altitude.

- 14 D'après les résultats précédents on a  $k_B = \frac{m^*gH_b}{T_0} = \frac{4}{3}\pi R_b^3 (\mu_b - \mu_e) \frac{gH_b}{T_0} = 9,3 \cdot 10^{-24}$  J/K.

Les causes d'erreurs sont par exemple la détermination des altitudes où l'on compte, le fait que des particules sortent et rentrent en permanence dans la zone visualisée, l'hypothèse d'uniformité de la distribution sur une hauteur  $e$ , etc...