

Corrigé du devoir surveillé n ° 7

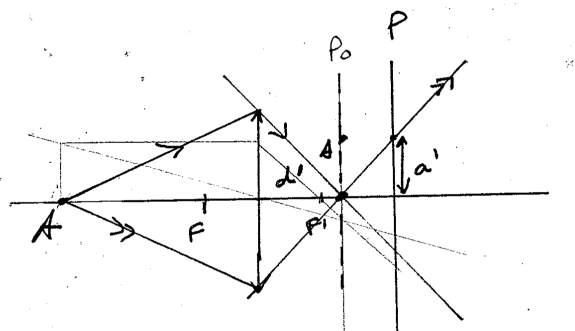
Problème I : Modélisation : principe de la méthode de l'autofocus**II.1 Mise au point**

- Q1. Il suffit d'appliquer la relation de conjugaison en faisant attention à l'algébrisation de la formule, soit $\frac{1}{d'} - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{f'_0}$, d'où $d' = \frac{x_0 f'_0}{x_0 + f'_0} = 10,5 \text{ cm}$.

La formule du grandissement permet d'accéder à la taille de l'image (on met une valeur absolue car le grandissement est négatif ici) : $h' = \left| \frac{d'}{x_0} \right| h = 0,52 \text{ cm}$

- Q2. Le schéma demandé est donné ci-après (il faut prendre des rayons auxiliaires pour déterminer la position A' de l'image de A).

La relation de Thalès, en valeur absolue donne alors facilement $\frac{a'}{\delta} = \frac{a}{d'}$, doit $a' = a \frac{\delta}{d'} = \frac{a\delta(x_0 + f'_0)}{x_0 f'_0} = 0,24 \text{ cm}$.



- Q3. On va faire l'hypothèse que les pixels sont carrés, de côté b et en nombre N sur la surface S . On a donc $Nb^2 = S$, soit $b = \sqrt{\frac{S}{N}} = 10 \mu\text{m}$.

La condition pour avoir une image nette est que le rayon de la tâche a' soit inférieur à la moitié de la taille d'un pixel, soit $a' < b/2$, ou encore $\delta < \frac{bd'}{2a} = 1,05 \mu\text{m}$! La marge de manoeuvre est vraiment faible !

II.2 Principe simplifié de l'auto focus

- Q4. Par la relation de conjugaison de Descartes comme précédemment il vient $d = \frac{f'd_0}{d_0 - f'}$.
- Q5. Si A est sur (P) c'est qu'il est en O . Par ailleurs comme (P_1) est conjugué avec (P) , l'image de A sera aussi sur (P_1) ! Il suffit donc de tracer le rayon issu de O passant par (O_1) et de déterminer son intersection avec (P_1) pour déterminer A_1 , ce qui est représenté sur la figure suivante.

Par stigmatisme les rayons issus de $A = O$ passant par les bords de la lentille convergent vers A_1 après l'avoir traversée.

F'_1 se détermine alors facilement par l'intersection du rayon arrivant parallèlement à l'axe optique et passant par le bas de la lentille, après traversée de cette dernière et de l'axe optique de la lentille L_1 .

Tout est représenté sur la figure suivante.

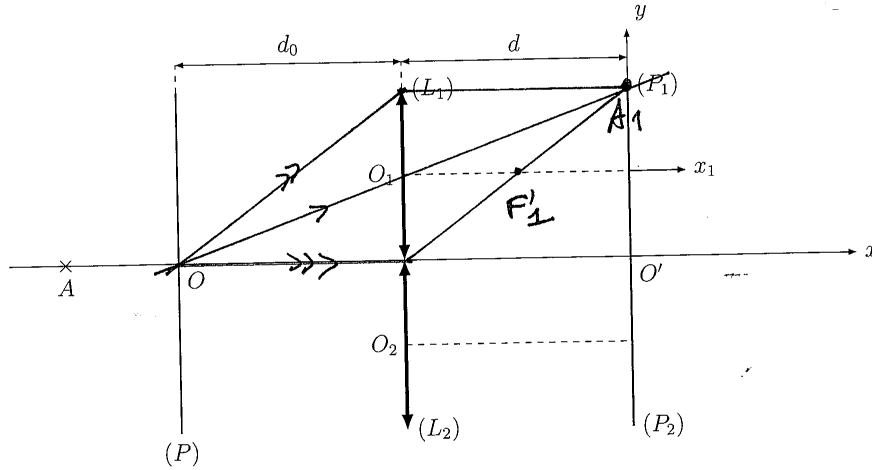


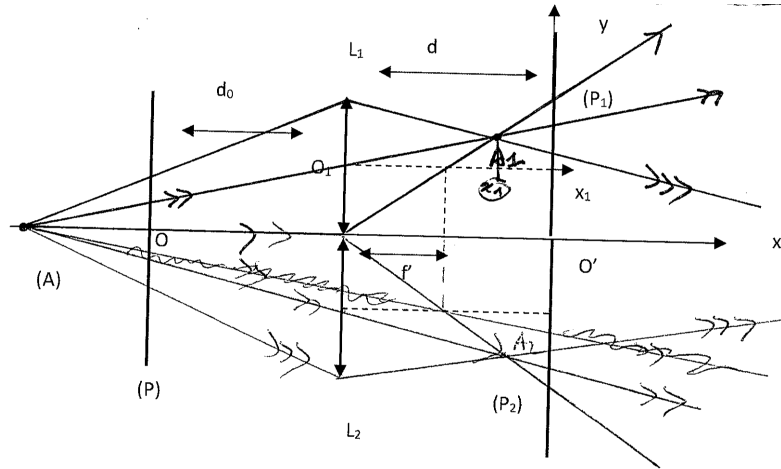
FIGURE 3 – Principe des lentilles de l'auto-focus

Q6. L'utilisation des triangles semblables permet facilement d'obtenir une des trois relations suivante : $y_1 = \frac{ad}{f'} = \frac{ad_0}{d_0 - f'} = a \left(1 + \frac{d}{d_0} \right)$.

Par symétrie $y_2 = -y_1$.

Q7. Il vient donc facilement $\Delta\Phi_0 = 2y_1 = 2a \left(1 + \frac{d}{d_0} \right)$.

Q8. Aucune difficulté pour construire l'image A_1 par les techniques habituelles.



Comme précédemment on peut écrire par utilisation de triangles semblables : $y_1 = a \times \frac{x_1}{f'}$.

Or par conjugaison $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{p - d_0} = \frac{1}{f'}$, d'où $y_1 = ax_1 \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{p - d_0} \right) = a \left(1 - \frac{x_1}{p - d_0} \right)$.

Q9. Les rayons passant par les bords convergent vers l'image A_i correspondante après la lentille L_i d'où les tracés sur la figure.

Q10. Toujours par des considérations géométriques (triangles semblables) il vient $y_s = y_1 \times \frac{d}{x_1}$.

On a de même $\frac{d - x_1}{x_1} = \frac{y_s - y_i}{2a}$, ce qui donne directement le résultat attendu $y_i = 2a \left(1 - \frac{d}{x_1} \right) + \frac{dy_1}{x_1}$.

Q11. Par simple symétrie : le point supérieur de la tache sur (P_2) est le symétrique du point inférieur de la tache sur (P_1) , d'où $y_i = -y_s$!

Dès lors $\Delta\Phi = y_s + y_i = y_1 \times \frac{d}{x_1} + 2a \left(1 - \frac{d}{x_1} \right) + \frac{dy_1}{x_1} = 2a + 2\frac{d}{x_1} (y_1 - a)$.

Or $y_1 - a = \frac{x_1}{d_0 - p}$, d'où par substitution le résultat attendu.

Q12. Il vient par un calcul direct $\Delta^2\Phi = 2ad \left(\frac{1}{d_0 - p} - \frac{1}{d_0} \right)$.

Q13. En inversant la formule précédente il vient $p = d_0 - \frac{1}{\frac{\Delta^2\Phi}{2ad} + \frac{1}{d_0}} = 1,98 \text{ cm} > 0$.

Comme cette valeur est positive l'écran est à gauche de A . Il faut le déplacer vers la droite.

Problème II D'après Banque PT Physique A 2016 Partie D

D.1 Système interférentiel à deux fentes

D.1.1. La difficulté est de bien comprendre ce que représente φ ... C'est le retard de phase du rayon passant par le trou F_2 par rapport à un rayon passant par le milieu des deux trous ! Et les deux trous sont distants de $2a$... Il y a plein de points de vigilance...

Par symétrie les deux rayons sont en phase en F_1 et F_2 . Le déphasage est donc localisé après le plan des trous.

En imaginant une source en M envoyant des rayons en sens inverse de celui suivi par la lumière on peut affirmer que les plans d'onde pour cette source imaginaire sont des plans perpendiculaires aux rayons lumineux entre le plan des trous et la deuxième lentille. Un calcul élémentaire classique montre alors que la différence de marche entre F_1M (ou F_2M) et le rayon fictif de la figure est en valeur absolue $a \sin \alpha \simeq a\alpha$, avec α l'angle que fait le rayon passant par le centre de la lentille et arrivant en M , avec l'axe optique. Comme on a utilisé le stigmatisme de la lentille c'est qu'on était dans les conditions de Gauss et que l'angle α est très petit devant 1 radian. Dès lors on a $\tan \alpha \simeq \alpha = \frac{|z|}{f'}$, soit la différence de marche (rappel entre un trou passant par F_1 ou F_2 et celui passant par le milieu des trous) $|\delta| = \frac{a|z|}{f'}$.

Enfin il est clair que le rayon passant par F_1 est en avance de phase sur le rayon fictif (passant par le milieu des trous) et qu'au contraire celui passant par F_2 est en retard si $z > 0$. On a donc $\varphi = +\frac{2\pi}{\lambda} \frac{az}{f'}$.

D.1.2. Les deux ondes sont cohérentes car issues d'une même source. D'après la formule de Fresnel des interférences à deux ondes de même amplitude déphasées de 2φ on a directement

$$E = 2E_0 (1 + \cos(2\varphi))$$

L'allure de la courbe est une sinusoïde de valeur moyenne $2E_0$, variant entre 0 et $4E_0$ de période π .

D.2 Système interférentiel à trois fentes

D.2.1.

D.2.1.1 Il faut cette fois, comme il y a trois ondes, faire le calcul complet. On a l'amplitude complexe totale en M donnée par $\underline{s} = s_0 (e^{j\varphi} + 1 + e^{-j\varphi}) = s_0 (1 + 2 \cos \varphi)$.

Dès lors l'éclairement est effectivement bien $\frac{1}{2} k s \underline{s}^* = E_0 (1 + 2 \cos \varphi)^2$ avec $E_0 = \frac{1}{2} k s_0^2$.

D.2.1.2 Les valeurs du tableau sont dans cet ordre : 9, 0, 1, 0, 9, qui correspondent soit à des extrema, soit à des annulations.

D.2.1.3 L'allure est facile à tracer : on trace d'abord $(1 + 2 \cos \varphi)$ qui est une sinusoïde de valeur moyenne égale à 1 et d'amplitude 2, qui varie donc entre -1 et 3 , avec une période de 2π . On met ensuite cette fonction au carré, ce qui l'a fait varier entre

0 et 9, et l'ancien minimum en π qui valait -1 devient un maximum secondaire valant cette fois +1.

Remarque pour les MP*! par ailleurs d'après la fonction réseau pour $N = 3$ qui s'applique ici on savait à quoi s'attendre.

D.2.2.

D.2.2.1 Il suffit de reprendre le calcul précédent en remplaçant le 1 correspondant à l'amplitude du rayon passant par F_0 par $-j$ (pour traduire le retard de phase de $\pi/2$). L'amplitude totale en M est alors donnée par $\underline{s} = s_0 (e^{j\varphi} - j + e^{-j\varphi}) = s_0 (2 \cos \varphi - j)$.

On en déduit l'éclairement $\frac{1}{2} k s s^* = E_0 (2 \cos \varphi - j) (2 \cos \varphi + j) = E_0 (4 \cos^2 \varphi - j^2) = E_0 (1 + 4 \cos^2 \varphi) = E_0 (3 + 2 \cos 2\varphi)$.

Le graphe est celui d'une sinusoïde de valeur moyenne $3E_0$, qui varie entre E_0 et $5E_0$ avec une période π .

On a donc bien une alternance régulière de fanges sombres et franges brillantes, de contraste $\mathcal{C} = \frac{5-1}{5+1} = \frac{2}{3} = 0,66$, ce qui fait qu'on arrive effectivement à les distinguer.

La période spatiale est celle de $\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{2az}{f'} \right)$, i.e. $i = \frac{\lambda f'}{2a}$.

D.2.2.2 Il faut que la différence des chemins optiques, avec et sans la lame, à savoir $(n-1)e$ soit égale à $\lambda/4$. On a donc $\lambda = 4(n-1)e = 600$ nm, ce qui est dans le domaine visible.

D.2.2.3 En O' le retard de phase du rayon central avec la lame, en prenant comme origine O pour le même rayon sans la lame est $\frac{2\pi}{\lambda} (x + e(n-1))$.

Il manque une hypothèse dans l'énoncé : les fentes doivent être placées dans le plan focal objet de la lentille, ce que suggère le schéma avec des rayons issus des fentes et qui ressortent quasiment parallèles entre-eux après la lentille... Si ce n'est pas le cas on peut faire un calcul approché mais qui sera d'autant plus faux que les fentes sont éloignées du plan focal objet. On se place dans cette hypothèse pour la suite (celle des fentes placées dans le plan focal).

Pour calculer le retard de phase pour le rayon F_1O' on peut dans un premier temps projeter O orthogonalement sur le segment de ce rayon après la lentille. On note I le point correspondant. Par le théorème de Malus O et I sont en phase, donc le retard de phase en I est nul. On a vérifié alors facilement que le retard de phase en O' est $\frac{2\pi}{\lambda} (IO') = \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \alpha$.

Les rayons seront en phase si donc $\frac{2\pi}{\lambda} (x + e(n-1)) = \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \alpha$, soit $x + e(n-1) = x \cos \alpha$. On en déduit $x = \frac{e(n-1)}{\cos \alpha - 1} \simeq -\frac{2e(n-1)}{\alpha^2}$, en utilisant l'approximation $\cos \alpha \simeq 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$.

On trouve alors $e = -\frac{xa^2}{2(n-1)f'^2} = \frac{1.10^{-2} \cdot 1.10^{-8}}{2 \times 0.5 \times 1.10^{-2}} = 10$ nm !!

D.2.3. C'est une question sur les calculs d'incertitudes... Comme les dates ne sont connues que par les années Frits Zernike a pu avoir son Nobel à 64 ou 65 ans. On peut même affirmer qu'il l'a eu à 65 ans à 1 an près... On peut prolonger en supposant une répartition uniforme entre la date d'anniversaire et celle de l'attribution du Nobel, ce qui donnerait un âge de 64,5 ans avec une incertitude type de $\frac{1 \text{ an}}{\sqrt{3}} = 7$ mois.

Si on veut pinailler ce résultat est à moduler du fait que le Nobel est en général annoncé début octobre...

III Chimie Pastis landais

Q23. La constante d'équilibre de la réaction s'écrit $K_1 = \frac{a(\text{CO}_{2(g)})[\text{HP}_2\text{O}_7^{3-}]}{[\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7^{2-}][\text{HCO}_3^-]}$.

Mais on a par ailleurs $K_{a1} = \frac{[\text{HP}_2\text{O}_7^{3-}][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7^{2-}]}$, $K_{a3} = \frac{[\text{HCO}_3^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{CO}_{2(aq)}]}$ et enfin $K_s = \frac{[\text{CO}_{2(aq)}]}{a(\text{CO}_{2(g)})}$.

On vérifie alors facilement que $K_1 = \frac{K_{a1}}{K_{a3}K_s} = 14,2$.

Q24. Notons n_b la quantité de matière de NaHCO_3 (de masse molaire $M_b = 84$ g/mol) et n_d celle de $\text{Na}_2\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7$ (de masse molaire $M_d = 222$ g/mol) dans le sachet de levure. Par hypothèse $n_b = n_d = n_0$. Déterminons n_0 .

La masse totale $m_t = 15$ g du sachet est $m_t = m_a + n_0(M_d + M_b)$ avec $m_a = 4$ g. On en tire $n_0 = \frac{m_t - m_a}{M_d + M_b} = 0,0359$ mol.

Dès lors $m_d = n_0 M_b = 7,98$ g et $m_b = n_0 M_b = 3,02$ g.

Q25. D'après la loi des gaz parfaits $V = \frac{n_0 RT}{P} = 1,32$ L.

Q26. a) On note deux courbes qui varient linéairement en échelle logarithmique. D'après la définition du pH ce sont clairement celles de H_{30}^+ et de OH^- . Celle des deux qui a la plus forte valeur) $pH = 0$ est bien sûr H_3O^+ (courbe 4). L'autre (Courbe 5) est OH^- .

Ensuite on a les trois courbes de répartition des trois formes des espèces phosphorées. La plus présente à pH acide est la forme acide $\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7^{2-}$ (Courbe 1), puis $\text{HP}_2\text{O}_7^{3-}$ (Courbe 2) et la dernière $\text{P}_2\text{O}_7^{4-}$ (Courbe 3).

b) Par lecture graphique à la valeur maximale (commune) des trois courbes 1 2 et 3, on obtient $c_p = 10^{-0,4}$ mol/L = 0,398 mol/L.

c) En ces deux points on voit qu'on a la même concentration entre un acide et sa base conjuguée. D'après la définition du pK_A , les abscisses de ces points devraient donc être les deux pK_A des couples des espèces phosphorées.

Q27. D'après l'énoncé les ions $\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7^{2-}$ et $\text{P}_2\text{O}_7^{4-}$ seront en même concentration. Le pH sera celui pour laquelle les courbes 1 et 3 se coupent. On lit $pH = 8$.