Exercices

Exercice 1. Étudier la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt + t^2} dt.$$

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pose :

$$f_n : x \mapsto \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{x(1 + x^2)}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $]0; +\infty[$.
2. Trouver un équivalent de $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1 + t^n) dt$.

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
2. À l'aide d'un changement de variable, déterminer un équivalent de (I_n) de la forme $\frac{C}{n}$ avec C une intégrale.

Exercice 4. Soit $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ et pour tout entier naturel n :

$$\varphi_n : \begin{array}{l} [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_0^x f(t^n) dt \end{array}$$

Montrer que la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x \mapsto f(0)x$ sur $[0; 1]$.

Exercice 5. Soit :

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t} dt$$

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'' .
2. Déterminer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit :

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1 + t^2)} dt.$$

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer f' (on prendra garde au signe de x).
2. En déduire une expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et déterminer $g^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Indication : montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^1 f'(xt) dt$.

Exercice 8. Soit :

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^x}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1; +\infty[$ et déterminer f' .
3. Montrer que f est décroissante sur $]1; +\infty[$.
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
5. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Exercice 9. Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \int_0^1 (1 - x)^n \sin(\pi x) dx.$$

Indication : changement de variable $u = nx$.

Exercice 10. Déterminer :

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{(1 + x^2)(a^2 - x^2)}} dx.$$

Indication : se ramener à des intégrales dont les bornes sont fixées.

Exercice 11. Soit :

$$I : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} - 1}{t} e^{-t} dt$$

1. Montrer que I est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer I' et en déduire la valeur de $I(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t} e^{-t} dt$.

Exercices CCINP

Exercice 12 (CCINP 19).

1. Prouver que, pour tout entier naturel n , $f_n : t \mapsto t^n \ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$ et calculer $I_n = \int_0^1 t^n \ln t dt$.
2. Prouver que $f : t \mapsto e^t \ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que $\int_0^1 e^t \ln t dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nn!}$.

Indication : utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.

Exercice 13 (CCINP 25).

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction $t \mapsto \frac{1}{1 + t^2 + t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2 + t^n e^{-t}}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 14 (CCINP 26). Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)^n} dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
(b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente?

Exercice 15 (CCINP 30).

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
(b) Résoudre (E) .

Exercice 16 (CCINP 49). Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[$, $f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

1. (a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.
(b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

2. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$.

En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$.

- (b) Prouver que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.