

6.1.1 Corde-Exercice 4

Quelques notions musicales :

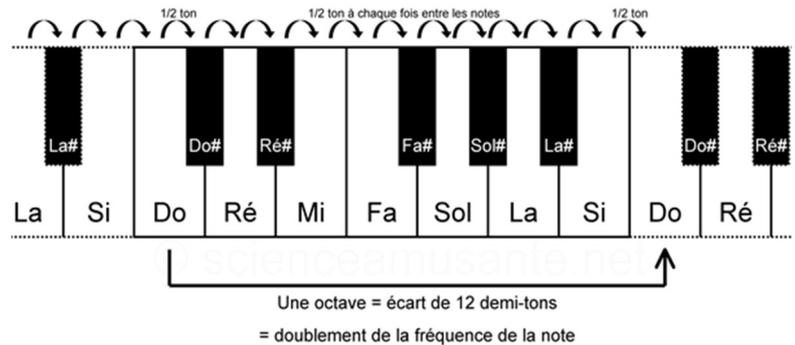
Un intervalle entre deux fréquences f_1 et f_2 s'exprime en *savarts* par la relation :
 $\Delta f = 1000 \log_{10}(f_2/f_1)$

Intervalles musicaux :

d'une octave $f_2/f_1 = 2$ et $\Delta f = 300$ savarts

d'un ton $f_2/f_1 = 2^{1/6}$ et $\Delta f = 50$ savarts

d'un demi-ton $f_2/f_1 = 2^{1/12}$ et $\Delta f = 25$ savarts



Les 7 notes naturelles de la gamme do, ré, mi, fa, sol, la, si et les 5 notes altérées par un dièse # qui les hausse d'un demi-ton, ou par un bémol b qui les baisse d'un demi-ton, constituent la *gamme chromatique*.

Les gammes sont numérotées de -1 à +7, le changement de numéro s'effectuant entre le si et le do.

La fréquence de référence pour toutes les notes est celle du la 3 égale à 440 Hz.

La corde sol 2 d'un violon émet sous l'archet un son comprenant une série de fréquences qui correspondent à la résonance de cette corde suivant les différents modes. La plus basse de ces fréquences $f = 196$ Hz, dite fondamentale, est celle du sol 2. La longueur utile de corde, entre le chevalet et le sillet, vaut $L = 330$ mm, sa masse linéique est $\mu = 2,55$ g.m⁻¹.

a-Calculer la tension T de la corde.

b-Avec quelle incertitude absolue et relative le violoniste doit-il ajuster avant un concert la valeur de T pour que la note jouée soit juste à ± 5 savarts, c'est-à-dire 0,1 ton ?

c-Calculer toutes les longueurs que le violoniste doit donner successivement à la corde, entre le doigt et le chevalet, pour monter la gamme du sol 2 au sol 3.

d-La longueur minimale de la corde est $\ell_0 = 60$ mm. Quelle est la note la plus aigüe que le violoniste puisse jouer ?

e-Avec quelle incertitude $\Delta \ell$ le doigt du violoniste doit-il définir la longueur ℓ de la corde pour que la note la 2 soit jouée juste à ± 5 savarts ?

f-Les notes des 4 cordes du violon sont sol 2, ré 3, la 3, mi 4 espacées d'un intervalle de quinte (3,5 tons). Comment le violoniste joue-t-il ré 3 sur la corde sol 2 ? la 3 sur la corde ré 3 ? mi 4 sur la corde la 3 ?

g-Pour que la caisse de l'instrument ne vrille pas, les 4 cordes sont également tendues. Calculer les masses linéiques des cordes ré 3, la 3 et mi 4.

6.1.1 Corde-Exercice 4

a- Pulsation fondamentale : $\omega = \frac{\pi c}{L}$ Fréquence fondamentale : $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{2L}$ avec : $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

D'où : $T = 4 \mu L^2 f^2$ A.N : $T = 42,7 \text{ N}$

b- Incertitude sur T : $u(T) = \left| \frac{\partial T}{\partial f} \right| u(f) = 8\mu L^2 f u(f)$ avec $u(f)$ l'incertitude sur la fréquence

La note doit être jouée à 5 savarts près soit : $5 = 1000 \log_{10} \left(\frac{f + u(f)}{f} \right)$ d'où : $u(f) = f(10^{0,005} - 1) \approx 1,16 \cdot 10^{-2} f$

A.N : $u(T) = 1 \text{ N}$ et $\frac{u(T)}{T} = 2,3\%$

c- On calcule déjà les fréquences des différentes notes du sol 2 au sol 3 :

Il y a un ton entre sol 2 et la 2 d'où : $f_{la2} = f_{sol2} 2^{\frac{1}{6}}$ A.N : $f_{la2} = 220 \text{ Hz}$

On calcule ensuite la longueur de corde ℓ pour que la note fondamentale soit le la 2 : $f_{la2} = \frac{c}{2\ell}$

Or, d'après la question 1 : $f_{sol2} = \frac{c}{2L}$ d'où : $f_{la2} = f_{sol2} \frac{L}{\ell}$ soit : $\ell = L \frac{f_{sol2}}{f_{la2}}$ A.N : $\ell = 294 \text{ mm}$

Et ainsi de suite...

Note	Sol 2	La 2	Si 2	Do 3	Ré 3	Mi 3	Fa 3	Sol 3
f (Hz)	196	220	247	262	294	330	349	392
ℓ (mm)	330	294	262	247	220	196	185	165

d- $f_{\max} = f_{sol2} \frac{L}{\ell_0}$ A.N : $f_{\max} = 1078 \text{ Hz}$

Entre sol 2 et cette note, il y a : $1000 \log_{10} \left(\frac{f_{\max}}{f_{sol2}} \right) = 740$ savarts

740 \approx 300 + 300 + 50 + 50 + 50 donc il y a 2 octaves et 3 tons entre sol 2 et cette note

sol 2 $\xrightarrow{1 \text{ octave}}$ sol 3 $\xrightarrow{1 \text{ octave}}$ sol 4 $\xrightarrow{1 \text{ ton}}$ la 4 $\xrightarrow{1 \text{ ton}}$ si 4 $\xrightarrow{1 \text{ ton}}$ do dièse 5

La note jouée est le do dièse 5.

e- $u(\ell) = \left| \frac{\partial \ell}{\partial f} \right| u(f) = \frac{c}{2f_{la2}^2} u(f) = \frac{\ell}{f_{la2}} u(f) \approx 1,16 \cdot 10^{-2} \ell$ A.N : $u(\ell) = 3,4 \text{ mm}$

f- D'après la question c-, la longueur de la corde doit être de 220 mm pour jouer ré 3 sur la corde sol 2.

Puisqu'il y a le même intervalle entre les notes fondamentales de deux cordes successives, ce sera la même longueur de 220 mm pour jouer la 3 sur la corde ré 3 et mi 4 sur la corde la 3.

g- On a : $\mu = \frac{T}{4\ell^2 f^2}$ A.N : corde ré 3 : $\mu = 1,13 \text{ g.m}^{-1}$; corde la 3 : $\mu = 0,51 \text{ g.m}^{-1}$; corde mi 4 : $\mu = 0,23 \text{ g.m}^{-1}$