
DEVOIR SURVEILLÉ 5 - 05/02/25 - *Durée 4h*

Sujet 1 - Type CCINP

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

Exercice 1 : La fonction dilogarithme

Présentation générale

Dans cet exercice, on commence par définir la fonction dilogarithme dans la première partie, puis on étudie quelques-unes de ses propriétés dans les parties suivantes.

On admet et on pourra utiliser librement l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie I - Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

Dans cette partie, on considère la fonction $f :]0,+\infty[\times]-\infty,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (t,x) \in]0,+\infty[\times]-\infty,1], \quad f(t,x) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - x}.$$

Q1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $]0,+\infty[\times]-\infty,1]$.

Q2. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Q3. Soit $x \in]-\infty,1]$. En comparant les fonctions $t \mapsto f(t,x)$ et $t \mapsto f(t,1)$, montrer que $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après les résultats précédents, on peut définir la fonction $L :]-\infty,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-\infty,1], \quad L(x) = x\int_0^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}t.$$

Cette dernière est appelée fonction dilogarithme.

Q4. Montrer que la fonction L est continue sur $]-\infty,1]$.

Partie II - Développement en série entière

Dans cette partie, on montre que la fonction L est développable en série entière.

On considère un nombre réel $x \in [-1,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $s_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad s_n(t) = t\mathrm{e}^{-(n+1)t}x^n.$$

Q5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}$.

Q6. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} s_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(t,x).$$

Q7. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ converge et déduire des questions précédentes que $L(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.

Q8. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, on a $L(x) + L(-x) = \dfrac{1}{2}L(x^2)$.

Q9. Déduire des questions précédentes les valeurs de $L(1)$ et $L(-1)$.

Partie III - Une autre propriété

Dans cette partie, on considère la fonction $h :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0,1[,\ h(x) = L(x) + L(1-x) + \ln(x)\ln(1-x).$$

Q10. Justifier que la fonction L est dérivable sur $]-1,1[$ et montrer que l'on a :

$$\forall x \in]-1,1[,\ L'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Q11. Montrer que la fonction h est constante sur $]0,1[$.

Q12. Montrer que $h(x) = L(1)$ pour tout $x \in]0,1[$. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t - 1}\mathrm{d}t$.

Exercice 2 : La constante d'Euler

Présentation générale

Dans cet exercice, on commence dans la première partie par démontrer la convergence d'une suite afin de définir la constante d'Euler comme sa limite. Dans la seconde partie, on détermine une expression de cette constante sous la forme d'une intégrale.

Partie I - Construction de la constante d'Euler

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$$

et on considère la suite $(\Delta_n)_{n\geq 2}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \Delta_n = u_n - u_{n-1}\,.$$

Q13. Déterminer un nombre $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{a}{n^2}$.

Q14. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 2} \Delta_n$ est convergente.

Q15. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie II - Expression intégrale de la constante d'Euler

Dans **Q15**, on a montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre réel que l'on note γ dans la suite de l'exercice. Ce dernier est appelé constante d'Euler. Dans cette partie, on détermine une expression de γ sous la forme d'une intégrale.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si } t < n \\ 0 & \text{si } t \geqslant n. \end{cases}$$

II.1 - Propriétés de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Dans cette partie, on pourra utiliser librement l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ valable pour tout $x \in]-1,+\infty[$.

Q16. Soit $t \in]0,+\infty[$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n \geqslant n_0$, on a :

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,.$$

Q17. Déduire de la question précédente que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto e^{-t}\ln(t)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Q18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a $|f_n(t)| \leqslant e^{-t}|\ln(t)|$.

Q19. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}\ln(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

II.2 - Convergence d'une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 u^n \ln(1-u)\,\mathrm{d}u\,.$$

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Q20. Montrer que l'intégrale I_n est convergente.

Q21. Déduire des résultats de la sous-partie **II.1** que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t\,.$$

Q22. Montrer que l'intégrale J_n est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,\mathrm{d}u$$

est convergente. En déduire que l'intégrale J_n est convergente et que l'on a les égalités :

$$J_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\,.$$

Q23. Montrer que l'on a la relation :

$$I_n = \frac{n}{n+1}\ln(n) + nJ_n\,.$$

Q24. Déduire des questions précédentes que :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 3 : Polynômes de Laguerre

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Q25. Justifier que l'intégrale définissant $(P \mid Q)$ est convergente.

Q26. Montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

Q27. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. À l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = k \int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Q28. Conclure que $(X^k \mid 1) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

Q29. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q30. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.

Q31. En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

Q32. Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?

Q33. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Q34. Justifier que P_k est de degré k.

Q35. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

Q36. Montrer que $(\alpha(P) \mid Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathbf{d}t$.

Q37. En déduire que α est un endomorphisme autoadjoint.

Q38. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser **Q33** et **Q37**.

Q39. Justifier l'existence d'une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de α.

FIN