CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 5 - Sujet 1

Exercice 1 : (*CCINP PC 2023*)

Q1. Soit $(t,x)\in]0,+\infty[\times]-\infty,1]$.
On a $e^t > e^0 = 1$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ et $x \leqslant 1$.
On en déduit que $e^t - x > 0$.
Ainsi, le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[\times]-\infty,1]$ donc :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien définie sur }]0,+\infty[\times]-\infty,1].}$$

Q2. La fonction $t\mapsto f(t,1)=\dfrac{t}{e^t-1}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ (par opérations).
Remarquons qu'elle est positive donc il suffit de prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,1)\mathrm{d}t$ converge.
En 0 *:* On a $e^t-1\underset{t\to0}{\sim} t$ donc $\displaystyle\lim_{t\to0} f(t,1)=1\in\mathbb{R}$.
On en déduit que la fonction $t\mapsto f(t,1)$ est prolongeable par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $]0,1]$.
En $+\infty$ *:* On a $t^2f(t,1)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{t^3}{e^t}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par croissances comparées donc $f(t,1)=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Pour tout $t\in[1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^2}\geqslant 0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge (Riemann en $+\infty$ avec $2>1$).
On en déduit par comparaison que la fonction $t\mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } t\mapsto f(t,1) \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$$

Q3. La fonction $t\mapsto f(t,x)=\dfrac{t}{e^t-x}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ (par opérations).
On a pour tout $t\in]0,+\infty[$, $x\leqslant 1$ donc $e^t-x\geqslant e^t-1>0$ donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$ puis produit par $t\geqslant 0$, on a $0\leqslant f(t,x)\leqslant f(t,1)$.
Comme la fonction $t\mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, on en déduit par comparaison par inégalité que :

$$\boxed{\text{la fonction } t\mapsto f(t,x) \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$$

Q4. Montrons que la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}t$ est continue sur $]-\infty,1]$.
$\star$ $\boxed{\textit{Continuité}}$ Pour tout $t\in]0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto\dfrac{t}{e^t-x}$ est continue sur $]-\infty,1]$ (fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle).
$\star$ $\boxed{\textit{Domination}}$ On a vu que pour tout $(t,x)\in]0,+\infty[\times]-\infty,1]$, $|f(t,x)|\leqslant \underbrace{f(t,1)}_{\text{ne dépend pas de } x}$ et la fonction $t\mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
On en déduit par le théorème de continuité des intégrales à paramètres que la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}t$ est continue sur $]-\infty,1]$.
Par produit avec la fonction continue $x\mapsto x$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } L \text{ est continue sur }]-\infty,1].}$$

Q5. La fonction $t\mapsto te^{-(n+1)t}x^n$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
Soit $y\in[0,+\infty[$.

Comme les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -\dfrac{1}{n+1}e^{-(n+1)t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0,y]$, on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^y te^{-(n+1)t}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{t}{n+1}e^{-(n+1)t}\right]_0^y + \frac{1}{n+1}\int_0^y e^{-(n+1)t}\mathrm{d}t = -\frac{y}{n+1}e^{-(n+1)y} + \frac{1}{n+1}\left[-\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)t}\right]_0^y \\ &= -\frac{1}{n+1}ye^{-(n+1)y} - \frac{1}{(n+1)^2}e^{-(n+1)y} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(n+1)^2} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

par croissances comparées car $n+1>0$.
On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\mathrm{d}t$ converge et a pour valeur $\dfrac{1}{(n+1)^2}$.
Par linéarité (produit par x^n), on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t \text{ converge et } \int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}.}$$

Q6. Soit $t \in]0,+\infty[$.
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(e^{-t}x)^n$ est une série géométrique avec $|e^{-t}x| \leqslant e^{-t} < 1$ donc elle converge et a pour somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-t}x)^n = \frac{1}{1-e^{-t}x}.$$

Par linéarité (produit par te^{-t}), on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} s_n(t)$ converge et a pour somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}x} = \frac{t}{e^t - x}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 0} s_n \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[\\ \text{et } \forall t \in]0,+\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(t,x).\end{array}}$$

Q7. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \left|\dfrac{x^n}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge (Riemann avec $2>1$).
On en déduit par comparaison par inégalité que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n^2} \text{ converge (absolument).}}$$

Utilisons le théorème d'intégration terme à terme (interversion intégrale / somme infinie).

- D'après **Q6** et par linéarité, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} xs_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et a pour somme $t \mapsto xf(t,x)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction xs_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et d'après **Q5**, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}|xs_n(t)|\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}|x|^n|x|\mathrm{d}t$ converge car $|x| \in [-1,1]$ et par linéarité.
  Ainsi, la fonction xs_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.
  Notons que d'après **Q5**, on a aussi par linéarité :

$$\int_0^{+\infty}|xs_n(t)|\mathrm{d}t = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

— La série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|xs_n(t)|\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{|x|^n}{n^2}$ converge d'après ce qui précède.

Par le théorème d'intégration terme à terme, on en déduit que $t\mapsto xf(t,x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (on le savait déjà) et on a :

$$\int_0^{+\infty} xf(t,x)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} xs_n(t)\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire par linéarité :

$$\boxed{L(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}.}$$

Q8. Soit $x\in[-1,1]$. Comme $-x\in[-1,1]$, on a par ce qui précède :

$$L(x)+L(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2}x^n.$$

On remarque que lorsque n est un entier impair, $1+(-1)^n = 0$ et lorsque n est un entier pair, $1+(-1)^n = 2$. En ne gardant que les entiers pairs $n=2p$ pour $p\in\mathbb{N}^*$, on obtient :

$$L(x)+L(-x) = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2}{(2p)^2}x^{2p} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x^2)^n}{n^2} = \frac{1}{2}L(x^2)$$

car $x^2\in[-1,1]$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in[-1,1],\ L(x)+L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2).}$$

Q9. Par Q7, on a $L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Par Q6, on obtient alors $L(-1) = \frac{1}{2}L(1) - L(1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{\pi^2}{12}$.

$$\boxed{L(1) = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } L(-1) = -\frac{\pi^2}{12}.}$$

Q10. D'après Q7, pour tout $x\in]-1,1[$, $L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}x^n$.

La fonction L est donc développable en série entière sur $]-1,1[$ donc elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et ses dérivées s'obtiennent sur cet intervalle par dérivation terme à terme.

En particulier, $\boxed{\text{la fonction } L \text{ est dérivable sur }]-1,1[}$ et on a pour tout $x\in]-1,1[$:

$$L'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}.$$

Pour $x=0$, on obtient $L'(0) = 1+\sum_{n=2}^{+\infty}0 = 1$ et pour tout $x\in]-1,1[\setminus\{0\}$:

$$L'(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-x)^n}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

en utilisant le développement en série entière usuel : pour tout $y\in]-1,1[$, $\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}y^n$.

Ainsi :

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ L'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x=0. \end{cases}}$$

Q11. Les fonctions L, ln et $x \mapsto 1-x$ sont dérivables sur $]0,1[$ et pour tout $x \in]0,1[$, $1-x \in]0,1[$ donc par composition, produit et somme, on en déduit que h est dérivable sur $]0,1[$ et on a pour tout $x \in]0,1[$:

$$h'(x) = \frac{-\ln(1-x)}{x} + (-1)\frac{-\ln(1-(1-x))}{1-x} + \frac{1}{x}\ln(1-x) + \frac{-1}{1-x}\ln x = 0.$$

Comme la dérivée de h est nulle sur l'intervalle $]0,1[$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est constante sur }]0,1[.}$$

Q12. Ainsi, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0,1[$, $h(x) = a$.
Étudions la limite de h en 0^+.
D'après Q4, L est continue en 0 et en 1 donc $\lim\limits_{x\to 0^+} L(x) = L(0) = 0$ (par Q7) et $\lim\limits_{x\to 0^+} L(1-x) = L(1)$.
D'autre part, $\ln(x)\ln(1-x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln x$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ par croissances comparées.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = L(1)$ d'où $a = L(1)$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]0,1[,\ h(x) = L(1).}$$

On remarque que la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t - 1}\mathrm{d}t$ est $L\left(\frac{1}{2}\right)$.
On a $h\left(\frac{1}{2}\right) = 2L\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$.
Ainsi :

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(L(1) - (\ln 2)^2\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

On a donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t - 1}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}.}$$

Exercice 2 : (*CCINP PC 2022*)
Q13. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On a :

$$\Delta_n = u_n - u_{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que :

$$\boxed{\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2} = -\frac{a}{n^2} \text{ avec } a = \frac{1}{2} > 0.}$$

Q14. On a d'après la question précédente, $-\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n^2} \geqslant 0$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{2n^2}$ converge (série de Riemann d'exposant $2 > 1$ et constante multiplicative $\frac{1}{2}$).
Par comparaison, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}(-\Delta_n)$ converge donc en multipliant le terme général par la constante -1, on obtient que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 2}\Delta_n \text{ est convergente.}}$$

Q15. La série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\Delta_n = \sum\limits_{n\geqslant 2}(u_n - u_{n-1}) = \sum\limits_{n\geqslant 1}(u_{n+1} - u_n)$ est une série télescopique.
On sait alors par le cours qu'elle est de la même nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Par la question 14, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$$

Q16. Posons $n_0 = \lfloor t \rfloor + 1$. On a $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n \geqslant n_0$, on a $t < n_0 \leqslant n$ donc $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)$ par définition de f_n.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } t \in]0,+\infty[, \text{ il existe } n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ vérifiant } n \geqslant n_0,\ f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t).}$$

Q17. Soit $t \in]0,+\infty[$.
D'après la question précédente, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n \geqslant n_0$:

$$f_n(t) = \underbrace{\left(1 - \frac{t}{n}\right)}_{>0}^n \ln(t) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \ln t = \exp\left(n\left(-\frac{t}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \ln t = \exp\left(-t + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) \ln t.$$

Par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \exp(-t)\ln(t)$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement vers la fonction } t \mapsto e^{-t}\ln(t) \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

Q18. Soit $t \in]0,+\infty[$.
Si $t \geqslant n$ alors $|f_n(t)| = 0 \leqslant e^{-t}|\ln(t)|$.
Si $t < n$ alors $|f_n(t)| = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) |\ln t|$.
Par l'inégalité donnée dans l'énoncé, on a $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leqslant -\frac{t}{n}$ donc $n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leqslant -t$ (car $n \geqslant 0$) donc par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \leqslant e^{-t}$ puis par produit par $|\ln(t)| \geqslant 0$, $|f_n(t)| \leqslant e^{-t}|\ln(t)|$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } t \in]0,+\infty[,\ |f_n(t)| \leqslant e^{-t}|\ln(t)|.}$$

Q19. La fonction $t \mapsto e^{-t}\ln(t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
Montrons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |e^{-t}\ln(t)| \mathrm{d}t$, généralisée en 0 et en $+\infty$, converge.
Étudions $\int_0^1 e^{-t}|\ln(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-t}(-\ln(t))\mathrm{d}t$.
On a $e^{-t}(-\ln(t)) \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$.
Pour tout $t \in]0,1]$, $-\ln(t) \geqslant 0$ et l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge donc $\int_0^1 (-\ln(t))\mathrm{d}t$ aussi.
Par comparaison, on en déduit que l'intégrale $\int_0^1 e^{-t}|\ln(t)|\mathrm{d}t$ converge.
Étudions $\int_1^{+\infty} e^{-t}|\ln(t)|\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$.
On a $\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t}\ln(t) = \lim_{t\to+\infty} \underbrace{\frac{t^3}{e^t}}_{\to 0} \underbrace{\frac{\ln(t)}{t}}_{\to 0} = 0$ car croissances comparées donc $e^{-t}\ln(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
On a de plus pour tout $t \in [1,+\infty[$, $\frac{1}{t^2} \geqslant 0$ et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge (car $2 > 1$).
On en déduit par comparaison que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}|\ln(t)|\mathrm{d}t$ converge.
Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}|\ln(t)|\mathrm{d}t$ converge.
Donc :

$$\boxed{\text{la fonction } t \mapsto e^{-t}\ln(t) \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$$

Q20. La fonction f_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
D'après la question 18, on a pour tout $t \in]0,+\infty[$, $0 \leqslant |f_n(t)| \leqslant e^{-t}|\ln(t)|$ et d'après la question 19, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}|\ln(t)|\mathrm{d}t$ converge.
Par comparaison, on en déduit que l'intégrale I_n converge absolument.
Ainsi :

$$\boxed{\text{l'intégrale } I_n \text{ est convergente.}}$$

Q21. Utilisons le théorème de convergence dominée.
D'après la question 17, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto e^{-t}\ln(t)$ sur $]0,+\infty[$.
D'après les questions 18 et 19, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in]0,+\infty[$, $|f_n(t)| \leqslant \underbrace{e^{-t}|\ln(t)|}_{\text{ne dépend pas de } n}$ et la fonction $t \mapsto e^{-t}|\ln(t)|$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t.}$$

Q22. Posons $f : u \mapsto \dfrac{u^{n+1}-1}{n+1}$ et $g : u \mapsto \ln(1-u)$.
Les fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ et on a pour tout $u \in [0,1[$:

$$f'(u) = u^n \text{ et } g'(u) = \frac{-1}{1-u} = \frac{1}{u-1}.$$

Montrons que $f \times g$ a une limite finie en 1.
On a pour tout $u \in [0,1[$:

$$f(u)g(u) = -\frac{1}{n+1}\frac{1-u^{n+1}}{1-u}(1-u)\ln(1-u) = -\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} u^k\right)(1-u)\ln(1-u)$$

(somme géométrique de raison $u \neq 1$).
On a $\lim_{u\to1}\left(\sum_{k=0}^{n} u^k\right) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ et $\lim_{u\to1}(1-u)\ln(1-u) = 0$ par composition des limites $\lim_{u\to1}(1-u) = 0$ et $\lim_{x\to0} x\ln(x) = 0$ (croissances comparées).
On en déduit que $\lim_{u\to1} f(u)g(u) = 0 \in \mathbb{R}$.
Ainsi, par intégration par parties, on obtient que les intégrales :

$$\int_0^1 f'(u)g(u)\mathrm{d}u = J_n \text{ et } \int_0^1 f(u)g'(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{1}{n+1}\frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u$$

sont de même nature.
Comme $\frac{1}{n+1}$ est une constante multiplicative non nulle, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } J_n \text{ est convergente si et seulement si l'intégrale } \int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u \text{ est convergente.}}$$

La fonction $u \mapsto \dfrac{u^{n+1}-1}{u-1}$ est continue par morceaux sur $[0,1[$ et on a pour tout $u \in [0,1[$:

$$\frac{u^{n+1}-1}{u-1} = \frac{1-u^{n+1}}{1-u} = \sum_{k=0}^{n} u^k \underset{t\to1}{\longrightarrow} n+1 \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que la fonction $u \mapsto \dfrac{u^{n+1}-1}{u-1}$ est prolongeable par continuité en 1.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u$ est convergente (car faussement impropre) donc par ce qui précède :

$$\boxed{\text{l'intégrale } J_n \text{ est convergente.}}$$

Par l'intégration par parties réalisée ci-dessus, on a alors :

$$\int_0^1 f'(u)g(u)\mathrm{d}u = [f(u)g(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u)g'(u)\mathrm{d}u = \lim_{u\to 1} f(u)g(u) - f(0)g(0) - \int_0^1 f(u)g'(u)\mathrm{d}u$$

c'est-à-dire :

$$J_n = 0 - 0 - \int_0^1 \frac{1}{n+1}\frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u.$$

Soit $x \in [0,1[$. On a de plus par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^x \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u = \int_0^x \sum_{k=0}^n u^k\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^n \int_0^x u^k\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^n \left[\frac{u^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} \underset{x\to 1}{\to} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$$

On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$.
Ainsi :

$$\boxed{J_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.}$$

Q23. On réalise le changement variable affine $u = 1 - \dfrac{t}{n}$ dans l'intégrale I_n.
On a $\mathrm{d}u = -\dfrac{1}{n}\mathrm{d}t$.
Lorsque t tend vers 0 alors u tend vers 1 et lorsque $t = n$ alors $u = 0$.
On a aussi $t = n(1-u)$.
Par le théorème de changement de variable, on obtient que les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^0 u^n \ln(n(1-u))(-n)\mathrm{d}u = \int_0^1 nu^n \ln(n(1-u))\mathrm{d}u$ sont de même nature donc sont convergentes (d'après Q20) et ont alors même valeur.
Ainsi on obtient par linéarité :

$$I_n = n\int_0^1 u^n\left(\ln n + \ln(1-u)\right)\mathrm{d}u = n\ln(n)\int_0^1 u^n\mathrm{d}u + n\int_0^1 u^n\ln(1-u)\mathrm{d}u = \frac{n\ln(n)}{n+1} + nJ_n.$$

$$\boxed{I_n = \frac{n}{n+1}\ln(n) + nJ_n.}$$

Q24. D'après les questions 22 et 23, on a :

$$I_n = \frac{n}{n+1}\ln(n) - \frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} = \frac{n}{n+1}\ln(n) - \frac{n}{n+1}\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{n}{n+1}\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k} - \ln(n) + \frac{1}{n+1}\right)$$

d'où :

$$u_n = -\left(1+\frac{1}{n}\right)I_n - \frac{1}{n+1}.$$

Par la question 21, on obtient alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$.
Par unicité de la limite, on en déduit que :

$$\boxed{\gamma = -\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t.}$$

Exercice 3 : *CCINP PC 2019*

Q25. Soit $(P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2$. La fonction $f:t\mapsto P(t)Q(t)\exp(-t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ par produit.

Comme PQ est un polynôme, on peut l'écrire sous la forme $\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $d\in\mathbb{N}$, $(a_0,\dots,a_d)\in\mathbb{R}^{d+1}$.

On a alors, pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, $t^2f(t)=\sum_{k=0}^{d} a_k t^{2+k}e^{-t}$.

Pour tout $k\in[\![0,d]\!]$, $\lim_{t\to+\infty} t^{2+k}e^{-t}=0$ (par croissances comparées) donc, par combinaison linéaire, $\lim_{t\to+\infty} t^2f(t)=0$ donc $f(t)=\underset{t\to+\infty}{o}(1/t^2)$.

On a pour tout $t\in[1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^2}\geqslant 0$ et comme $2>1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

On en conclut par comparaison que :

$$\boxed{\text{l'intégrale définissant } (P|Q) \text{ est convergente.}}$$

Q26. Notons $\varphi:(P,Q)\mapsto(P|Q)$.

— La question précédente prouve que φ est définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

— Pour $(P_1,P_2,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^3$, $\lambda\in\mathbb{R}$, par linéarité d'intégrales généralisées toutes convergentes, $\varphi(P_1+\lambda P_2,Q)=\varphi(P_1,Q)+\lambda\varphi(P_2,Q)$.
Ainsi, φ est linéaire à gauche.

— Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, pour tout $(P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2$, $\varphi(P,Q)=\varphi(Q,P)$.
Ainsi, φ est symétrique et étant linéaire à gauche, c'est donc une forme bilinéaire et symétrique.

— Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. On a $\varphi(P,P)=\displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)^2e^{-t}dt$.
Pour tout $t\in[0,+\infty[$, $P(t)^2e^{-t}\geqslant 0$ donc par positivité de l'intégrale $(0\leqslant+\infty)$, $\varphi(P,P)\geqslant 0$.
Ainsi, φ est positive.
On suppose $\varphi(P,P)=0$. On a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)^2e^{-t}dt=0$.
Comme $t\mapsto P(t)^2e^{-t}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, d'après le théorème de nullité de l'intégrale, pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, $P(t)^2\underbrace{e^{-t}}_{\neq 0}=0$ d'où $P(t)=0$.
Le polynôme P a une infinité de racines donc P est le polynôme nul.
Par conséquent, φ est définie.

On en déduit que :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X].}$$

Q27. On pose pour $t\in\mathbb{R}^+$, $u(t)=t^k$ et $v(t)=-e^{-t}$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et pour $t\geqslant 0$, $u'(t)=kt^{k-1}$, $v'(t)=e^{-t}$.
De plus, par croissance comparée, $\lim_{t\to+\infty}u(t)v(t)=0\in\mathbb{R}$ donc, par intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}u(t)v'(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}u'(t)v(t)dt$ sont de même nature donc convergentes d'après Q25 (la première par exemple est l'intégrale définissant $(X^k|1)$) et on a :

$$\int_0^{+\infty}u(t)v'(t)dt=[u(t)v(t)]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}u'(t)v(t)dt$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}t^ke^{-t}\mathrm{d}t=k\int_0^{+\infty}t^{k-1}e^{-t}\mathrm{d}t.}$$

Q28. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on a $(X^k|1)=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^ke^{-t}dt$.
Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on pose $\mathcal{P}(k)$: « $(X^k|1)=k!$ ».

Pour $k=0$, $(X^k|1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.
D'après la question précédente, $(X^{k+1}|1) = (k+1)(X^k|1)$ (car $k+1 \in [\![1,n]\!]$) donc par l'hypothèse de récurrence, $(X^{k+1}|1) = (k+1)k! = (k+1)!$ donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
On peut alors conclure par récurrence que :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0,n]\!],\ (X^k|1) = k!.}$$

Q29. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $\deg P \leqslant n$ donc $\deg P' \leqslant n-1$ et $\deg P'' \leqslant n-2$.
On a alors $\deg(XP') = \deg(X) + \deg(P') \leqslant n$ et $\deg(1-X)P'' = \deg(1-X) + \deg(P'') \leqslant n-1 \leqslant n$.
Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel, on en déduit que $\alpha(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
De plus, par linéarité de la dérivation, α est linéaire.
En effet, si $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\alpha(\lambda P + Q) = X(\lambda P + Q)'' + (1-X)(\lambda P + Q)' = X(\lambda P'' + Q'') + (1-X)(\lambda P' + Q') = \lambda(XP'' + (1-X)P') + (XQ'' + (1-X)Q') = \lambda\alpha(P) + \alpha(Q)$.
Donc :

$$\boxed{\alpha \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Q30. On a $\alpha(1) = 0$, $\alpha(X) = 1-X$ et, pour $k \geqslant 2$, $\alpha(X^k) = k(k-1)X^{k-1} + kX^{k-1} - kX^k = -kX^k + k^2X^{k-1}$.
La matrice de α dans la base $(1, X, \cdots, X^n)$ est donc :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}}$$

Q31. Cette matrice est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux à savoir $0,\ -1,\ -2, \cdots, -n$. L'endomorphisme α possède donc $n+1$ valeurs propres distinctes et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ donc α est diagonalisable (son polynôme caractéristique est scindé à racines simples).
Finalement :

$$\boxed{\alpha \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k;\ k \in [\![0;n]\!]\}.}$$

Q32. $\ker(\alpha + k\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ est le sous-espace propre E_{-k} de α associé à la valeur propre $-k$.
D'après la question précédente, le polynôme caractéristique de α est scindé à racines simples donc les sous-espaces propres de α sont de dimension 1 d'où :

$$\boxed{\dim\ker(\alpha + k\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \dim(E_{-k}) = 1.}$$

Q33. Soit Q_k un vecteur engendrant E_{-k} (il est nécessairement non nul).
On note c_k son coefficient dominant, on a c_k non nul et on pose $P_k = \dfrac{1}{c_k}Q_k$.
P_k est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1 et $P_k \in E_{-k}$ (sous-espace vectoriel) donc $\alpha(P_k) = -kP_k$.
Si R_k est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(R_k) = -kR_k$ alors en particulier, $R_k \in E_{-k}$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $R_k = aQ_k$. Le coefficient dominant de R_k est 1 et celui de Q_k est c_k donc $ac_k = 1$ donc $a = \dfrac{1}{c_k}$ d'où $R_k = P_k$.
Par conséquent :

$$\boxed{\text{il existe un unique polynôme } P_k \in \mathbb{R}_n[X], \text{ de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant } \alpha(P_k) = -kP_k.}$$

Q34. Soit d le degré de P_k (comme P_k est non nul, $d \in \mathbb{N}$).
Comme P_k est unitaire, il s'écrit $P_k = X^d + R$ avec $\deg(R) \leqslant d-1$.
On peut identifier les coefficients devant X^d dans l'égalité polynômiale $XP_k'' + (1-X)P_k' = -kP_k$ (à gauche, $XP_k'' + P_k'$ est de degré inférieur à $d-1$ et le coefficient devant X^d de $-XP_k'$ est $-d$ et à droite, le coefficient devant X^d est $-k$) et on obtient $-d = -k$ donc $d = k$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{le polynôme } P_k \text{ est de degré } k.}$$

Q35. $\star$ Le polynôme 1 est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ de coefficient dominant égal à 1 et tel que $\alpha(1) = 0 = -0(1)$ donc par unicité, $\boxed{P_0 = 1}$.
$\star$ Un polynôme de degré 1 et de coefficient dominant 1 s'écrit $P = X + a$.
On a $\alpha(P) = -P$ si et seulement si $1 - X = -X - a$ donc si et seulement si $a = 1$.
On en déduit que $\boxed{P_1 = X - 1}$.
$\star$ Soit $P = X^2 - 4X + 2$. C'est un polynôme de coefficient dominant égal à 1.
De plus, $\alpha(P) = 2X + (1-X)(2X-4) = -2X^2 + 8X - 4 = -2P$.
On en déduit par unicité que $\boxed{P_2 = X^2 - 4X + 2.}$

Q36. Par définition, $(\alpha(P)|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ (intégrale convergente par Q25)
On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $u(t) = tP'(t)e^{-t}$.
Les fonctions u et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $u'(t) = e^{-t}(tP''(t) + P'(t) - tP'(t))$.
Par croissance comparée, $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)Q(t) = 0$ donc, par intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ sont de même nature donc convergentes et on a :

$$(\alpha(P)|Q) = [tP'(t)e^{-t}Q(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t.$$

$$\boxed{(\alpha(P)|Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t.}$$

Q37. En échangeant les noms de P et Q dans le résultat obtenu, on a :

$$(\alpha(Q)|P) = -\int_0^{+\infty} tQ'(t)P'(t)e^{-t}\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t = (\alpha(P)|Q).$$

D'où par symétrie du produit scalaire, $(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q))$.
On en déduit que :

$$\boxed{\alpha \text{ est un endomorphisme autoadjoint.}}$$

Q38. Soit k et ℓ deux entiers distincts de $\mathbb{R}_n[X]$.
D'après *Q37*, $(\alpha(P_k)|P_\ell) = (P_k|\alpha(P_\ell))$ donc d'après *Q33*, $-k(P_k|P_\ell) = -\ell(P_k|P_\ell)$.
Comme $k \neq \ell$, on en déduit que $(P_k|P_\ell) = 0$.
Pour prouver ceci, on pouvait aussi utiliser un résultat du cours : comme α est un endomorphisme autoadjoint, $P_k \in E_{-k}$ et $P_\ell \in E_{-\ell}$ avec $-k \neq -\ell$, on a $P_k \perp P_\ell$.
Donc $(P_0, \cdots, P_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ et elle ne comporte pas le vecteur nul donc elle est libre et elle contient $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ avec $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$.
Ainsi :

$$\boxed{(P_0, \cdots, P_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Q39. On peut répondre de deux façons à cette question.
- Comme α est un endomorphisme autoadjoint, d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de α.
- Comme $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$, $\left(\dfrac{P_0}{\|P_0\|}, \ldots, \dfrac{P_n}{\|P_n\|}\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ et elle est formée de vecteurs propres de α puisque pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est un vecteur propre de α.