CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 5 - Sujet 2

Mines PC 2020

I. Résultats préliminaires

I.1. Étude d'une série entière

1. Soit $x \in]0,+\infty[$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
• On a $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$.
Pour tout $t \in]0,1]$, on a $\dfrac{1}{t^{1-x}} \geq 0$.
L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t$ converge car $1-x<1$ puisque $x>0$.
Ainsi, par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
• On a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$ par croissances comparées donc $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Pour tout $t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^2} \geq 0$.
L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge car $2>1$.
Ainsi, par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ donc $\Gamma(x)$ existe.
On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi :
$$\boxed{\text{la fonction } \Gamma \text{ est bien définie sur }]0,+\infty[.}$$
De plus, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$ et elle y prend au moins une valeur non nulle (par exemple en $t=1$ puisque $e^{-1}>0$) donc par stricte positivité de l'intégrale ($0<+\infty$), on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t > 0$.
Ainsi :
$$\boxed{\text{la fonction } \Gamma \text{ est à valeurs strictement positives.}}$$

2. Soit $x \in]0,+\infty[$. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $0<a<b$.
Les fonctions $t\mapsto -e^{-t}$ et $t\mapsto t^x$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, de dérivées respectives $t\mapsto e^{-t}$ et $t\mapsto xt^{x-1}$, donc on a par intégration par parties :
$$\int_a^b t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-e^{-t}t^x]_a^b + x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
On a $\displaystyle\lim_{a\to 0^+}(-e^{-a}a^x) = 0$ (car $x>0$) et $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}(-e^{-b}b^x)=0$ par croissances comparées.
Comme les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$ convergent, on obtient par passage à la limite dans l'égalité obtenue ($a\to 0^+$ et $b\to+\infty$) :
$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
Ainsi :
$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

3. D'après la question 1, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ et :
$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{\Gamma(n+1+\alpha+1)n!}{\Gamma(n+\alpha+1)(n+1)!} = \frac{\Gamma((n+\alpha+1)+1)}{(n+1)\Gamma(n+\alpha+1)}\\ &= \frac{(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{(n+1)\Gamma(n+\alpha+1)} \quad \text{(d'après la question 2 avec } n+\alpha+1>0)\\ &= \frac{n+\alpha+1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1.\end{aligned}$$
D'après la règle de d'Alembert pour les séries entières, on obtient que $\boxed{R = \dfrac{1}{1} = 1}$.

4. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+\alpha} x^n e^{-t}}{n!} dt.$$

Fisons $x \in]-1,1[$ et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \dfrac{t^{n+\alpha} x^n e^{-t}}{n!}$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \dfrac{x^n}{n!} t^{n+\alpha} e^{-t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme multiple (par la constante $\dfrac{x^n}{n!}$) de la fonction $t \mapsto t^{n+\alpha} e^{-t}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après la question 1 car $n + \alpha + 1 > 0$ et la fonction est à valeurs positives).

— Pour tout $t > 0$, $\sum_{n \geq 0} f_n(t) = \sum_{n \geq 0} t^\alpha e^{-t} \dfrac{(xt)^n}{n!}$ converge (multiple d'une série exponentielle) et sa somme vaut :
$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = t^\alpha e^{-t} e^{xt} = t^\alpha e^{(x-1)t}.$$

De plus, S est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \frac{|x|^n}{n!} \Gamma(n + \alpha - 1) = a_n |x|^n$ donc $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \sum a_n |x|^n$ converge (car $x \in]-1,1[$, intervalle ouvert de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, donc $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge absolument).

D'où, d'après le théorème d'intégration terme à terme, S est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} S(t) dt = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{(x-1)t} dt.$$

Posons $u = (1-x)t \Leftrightarrow t = \dfrac{u}{1-x}$. Comme $x \in]-1,1[$, la fonction $u \mapsto \dfrac{u}{1-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. On a $\displaystyle\lim_{u \to 0} \frac{u}{1-x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} \frac{u}{1-x} = +\infty$.

On a $dt = \dfrac{du}{1-x}$.

D'où, comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{(x-1)t} dt$ converge, on peut effectuer le changement de variable sur l'intégrale impropre et la nouvelle intégrale converge et :
$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{(x-1)t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(1-x)^\alpha} e^{-u} \frac{du}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-R,R[, \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}.}$$

I.2. Projections orthogonales

5. Comme F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, on a $F \oplus F^\perp = E$.
La projection orthogonale π_F sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.
Elle est définie par : pour tout $x \in E$, il existe un unique $(y,z) \in F \times F^\perp$ tel que $x = y + z$ et on pose alors $\pi_F(x) = y$.

6. On a $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i + \left(x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right)$.
On a clairement $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \in F$ et $x - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \in F^\perp$ car pour tout $j \in [\![1,n]\!]$:
$$\left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \right\rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=\delta_{i,j}} = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0.$$

Ainsi :
$$\boxed{\pi_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.}$$

7. On a $x = \pi_F(x) + x - \pi_F(x)$ où $\underbrace{\pi_F(x)}_{\in F} \perp \underbrace{(x - \pi_F(x))}_{\in F^\perp}$, donc d'après le théorème de Pythagore,
$$\|x\|^2 = \|\pi_F(x)\|^2 + \|x - \pi_F(x)\|^2$$
et comme la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthogonale, on a également par le théorème de Pythagore :
$$\|\pi_F(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \| \langle x, e_i \rangle e_i \|^2 = \sum_{i=1}^{n} (| \langle x, e_i \rangle | \times 1)^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.$$

Ainsi :

$$\boxed{\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.}$$

II. Polynômes de Laguerre

8. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $(|a| - |b|)^2 \geq 0$ donc en développant, $a^2 + b^2 - 2|ab| \geq 0$ d'où :

$$\boxed{|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.}$$

9. Soit f et g deux éléments de E_α.
La fonction $x \mapsto x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions continues.
On a pour tout $x > 0$:

$$0 \leq |x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)| = x^\alpha e^{-x} |f(x)g(x)| \leq x^\alpha e^{-x} \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2}.$$

Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2} dx$ converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes (car $f, g \in E_\alpha$).
Par comparaison, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)| dx$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) dx$ est absolument convergente.
Ainsi :

$$\boxed{\text{si } f \text{ et } g \text{ sont deux éléments de } E_\alpha, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) dx \text{ converge.}}$$

10. • $E_\alpha \subset \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ par définition de E_α.
• La fonction nulle appartient à E_α car $\displaystyle\int_0^{+\infty} 0 dt$ converge.
• Pour tout $(f, g) \in E_\alpha$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g \in E_\alpha$ car :
— $\lambda f + g$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme combinaison linéaire de fonctions continues,
— pour tout $x \geq 0$,

$$x^\alpha e^{-x} ((\lambda f + g)(x))^2 = \lambda^2 x^\alpha e^{-x} f(x)^2 + 2\lambda x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) + x^\alpha e^{-x} g(x)^2$$

et les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} g(x)^2 dx$ convergent d'après 9 donc par linéarité, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} ((\lambda f + g)(x))^2 dx$ converge.
On en déduit que :

$$\boxed{E_\alpha \text{ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel } \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R}).}$$

11. Soit p une fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$. Alors :
— p est continue sur $\mathbb{R}_+$ car polynomiale,
— en posant $p^2 : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ (possible car p^2 est encore polynomiale avec $d \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$), on a pour tout $x > 0$, $x^\alpha e^{-x} p(x)^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k x^{\alpha+k} e^{-x}$.
Or, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha+1+k-1} e^{-x} dx$ converge puisque $\underbrace{\alpha + 1}_{>0} + k > 0$.
Donc par linéarité, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{d} a_k x^{\alpha+1+k-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} p(x)^2 dx$ converge.

$$\boxed{\text{Toute fonction polynômiale sur } [0, +\infty[\text{ est un élément de } E_\alpha.}$$

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On a

$$\varphi_0 : x \mapsto x^\alpha e^{-x} \text{donc } \boxed{\psi_0 : x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_0^{(0)}(x) = 1}$$

$$\varphi_1 : x \mapsto x^{\alpha+1} e^{-x} \text{donc } \varphi_1^{(1)} : x \mapsto (\alpha + 1) x^\alpha e^{-x} - x^{\alpha+1} e^{-x} \text{donc } \boxed{\psi_1 : x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_1^{(1)}(x) = (\alpha + 1) - x}$$

$$\varphi_2 : x \mapsto x^{\alpha+2} e^{-x} \text{donc } \varphi_2^{(1)} : x \mapsto (\alpha + 2) x^{\alpha+1} e^{-x} - x^{\alpha+2} e^{-x}$$

$$\text{donc } \varphi_2^{(2)} : x \mapsto (\alpha + 2)(\alpha + 1) x^\alpha e^{-x} - 2(\alpha + 2) x^{\alpha+1} e^{-x} + x^{\alpha+2} e^{-x}$$

$$\text{donc } \boxed{\psi_2 : x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_2^{(2)}(x) = (\alpha + 2)(\alpha + 1) - 2(\alpha + 2)x + x^2}.$$

13. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, posons $g_a : x \mapsto x^a$.
g_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et par récurrence, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x > 0, \quad g_a^{(k)}(x) = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(a-i)\right)x^{a-k}.$$

Posons aussi $h : x \mapsto e^{-x}$.
h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x > 0, \quad h^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\varphi_n = g_{n+\alpha}h$, on a alors d'après la formule de Leibniz, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\varphi_n^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g_{n+\alpha}^{(k)}(x)h^{(n-k)}(x) = \binom{n}{0}g_{n+\alpha}(x)h^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}g_{n+\alpha}^{(k)}(x)h^{(n-k)}(x)\\ &= x^{n+\alpha}(-1)^n e^{-x} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}(-1)^{n-k}x^{n+\alpha-k}e^{-x}\prod_{i=0}^{k-1}(n+\alpha-i)\right),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\psi_n(x) &= x^{-\alpha}e^x\varphi_n^{(n)}(x)\\ &= (-1)^n x^n + x^{-\alpha}e^x\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}(-1)^{n-k}x^{n+\alpha-k}e^{-x}\prod_{i=0}^{k-1}(n+\alpha-i)\right)\\ &= (-1)^n x^n + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\prod_{i=0}^{k-1}(n+\alpha-i)\right)x^{n-k}\end{aligned}$$

donc ψ_n est bien polynomiale sur $\mathbb{R}_+^*$, son degré est n et son coefficient dominant est $(-1)^n$.
Ceci est également vrai pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \psi_n \text{ est polynomiale, son degré est } n \text{ et son coefficient dominant est } (-1)^n.}$$

14. • Pour tout $(f,g) \in E_\alpha^2$, $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f(x)g(x)dx$ existe d'après la question 9.
• Pour tout $(f,g,h) \in E_\alpha^3$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\langle \lambda f + g, h\rangle &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}(\lambda f(x) + g(x))h(x)dx\\ &= \lambda\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f(x)h(x)dx + \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}g(x)h(x)dx \quad \text{(par linéarité car ces deux intégrales sont convergentes)}\\ &= \lambda\langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle,\end{aligned}$$

donc $\langle .,.\rangle$ est linéaire à gauche.
• Pour tout $(f,g) \in E_\alpha^2$,

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f(x)g(x)dx = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}g(x)f(x)dx = \langle g,f\rangle,$$

donc $\langle .,.\rangle$ est symétrique.
$\langle .,.\rangle$ est linéaire à gauche et symétrique donc bilinéaire.
• Pour tout $f \in E_\alpha$, pour tout $x > 0$, $x^\alpha e^{-x}f(x)g(x) \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale convergente $(0 \leq +\infty)$, on a :

$$\langle f,f\rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f(x)^2dx \geq 0.$$

De plus, comme $x \mapsto x^\alpha e^{-x}f(x)^2$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$, comme $0 < +\infty$ et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f(x)^2dx$ converge, on a :

$$\begin{aligned}\langle f,f\rangle = 0 &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f(x)^2dx = 0\\ &\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad x^\alpha e^{-x}f(x)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad f(x) = 0\\ &\Leftrightarrow \forall x \geq 0, \quad f(x) = 0 \quad \text{car } f \text{ est continue en } 0\end{aligned}$$

donc $\langle .,.\rangle$ est défini positif.

$$\boxed{\langle .,.\rangle \text{ est donc bien un produit scalaire sur } E_\alpha.}$$

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
• D'après les calculs faits à la question 13, on a, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\varphi_n^{(k)}(x) = x^{n+\alpha}(-1)^n e^{-x} + \sum_{i=1}^{k} \left(\binom{k}{i} (-1)^{k-i} x^{n+\alpha-i} e^{-x} \prod_{j=0}^{i-1} (n+\alpha-j) \right).$$

Pour tout $i \in [\![0, k]\!] \subset [\![0, n-1]\!]$, $n+\alpha-i \geq \alpha+1 > 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} x^{n+\alpha-i} = 0$, donc

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \underbrace{x^{n+\alpha}}_{\to 0}(-1)^n \underbrace{e^{-x}}_{\to 1} + \sum_{i=1}^{k} \left(\underbrace{\binom{k}{i}(-1)^{k-i} \prod_{j=0}^{i-1}(n+\alpha-j)}_{\text{constante par rapport à } x} \underbrace{x^{n+\alpha-i}}_{\to 0} \underbrace{e^{-x}}_{\to 1} \right) \underset{x\to 0}{\to} 0$$

comme somme finie (nombre de termes indépendant de x) de termes de limite nulle.
• De plus,

$$\frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{e^{-x/2}} = (-1)^n \underbrace{x^{n+\alpha} e^{-x}}_{\to 0 \text{ par croissances comparées}} + \sum_{i=1}^{k} \left(\underbrace{\binom{k}{i}(-1)^{k-i} \prod_{j=0}^{i-1}(n+\alpha-j)}_{\text{constante par rapport à } x} \underbrace{x^{n+\alpha-i} e^{-x/2}}_{\to 0 \text{ par croissances comparées}} \right) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

comme somme finie (nombre de termes indépendant de x) de termes de limite nulle.
Ainsi :

$$\boxed{\varphi_n^{(k)}(x) \underset{x\to 0}{\to} 0 \text{ et } \varphi_n^{(k)}(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(e^{-x/2}).}$$

16. • Soit m et n deux entiers naturels.
Montrons par récurrence que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x) \varphi_n^{(n-k)}(x) dx \qquad (P_k).$$

Initialisation : Par définition de ψ_n et $\langle .,. \rangle$, on a

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \psi_m(x) \psi_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \psi_m(x) \varphi_n^{(n)}(x) dx$$

donc on a bien P_0.
Hérédité : Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ (on suppose donc $n \geq 1$) et supposons P_k vérifiée.
Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x) \varphi_n^{(n-k)}(x) dx$ converge.
Posons alors $u(x) = \psi_m^{(k)}(x)$, $u'(x) = \psi_m^{(k+1)}(x)$, $v'(x) = \varphi_n^{(n-k)}(x)$, $v(x) = \varphi_n^{(n-k-1)}(x)$ (avec $n-k-1 \geq 0$).
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
ψ_m est polynômiale sur $\mathbb{R}_+$ donc $\psi_m^{(k)}$ est polynômiale sur $\mathbb{R}_+$ donc
— $\psi_m^{(k)}$ a une limite finie en 0 donc comme $\varphi_n^{(n-k-1)}$ a une limite nulle en 0 d'après la question précédente, on a

$$\lim_{x\to 0} u(x)v(x) = \lim_{x\to 0} \psi_m^{(k)}(x) \varphi_n^{(n-k-1)}(x) = 0.$$

— et $u(x)v(x) = \psi_m^{(k)}(x) o(e^{-x/2}) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ par croissances comparées.
Enfin, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(x)v'(x)dx$ converge donc par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(x)v(x)dx$ converge et

$$\begin{aligned}
\langle \psi_m, \psi_n \rangle &= (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x) \varphi_n^{(n-k)}(x) dx \\
&= (-1)^k \left(\left[\psi_m^{(k)}(x) \varphi_n^{(n-k-1)}(x) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k+1)}(x) \varphi_n^{(n-k-1)}(x) dx \right) \\
&= (-1)^k \left(0 - \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k+1)}(x) \varphi_n^{(n-k-1)}(x) dx \right) = (-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k+1)}(x) \varphi_n^{(n-k-1)}(x) dx
\end{aligned}$$

On a donc bien P_{k+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x) \varphi_n^{(n-k)}(x) dx.$$

En particulier, pour $k = n$, on obtient :

$$\boxed{\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx.}$$

• Soient m et n deux entiers naturels tels que $m \neq n$, et, quitte à intervertir les rôles, supposons que $m < n$. Alors, d'après le premier point, on a :

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx.$$

Or ψ_m est une fonction polynomiale de degré $m < n$, donc $\psi_m^{(n)} = 0$, donc

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx = \int_0^{+\infty} 0dx = 0.$$

$$\boxed{\text{La famille } (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc orthogonale pour le produit scalaire } \langle .,. \rangle.}$$

17. D'après la question précédente,

$$\|\psi_n\|_\alpha^2 = \langle \psi_n, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_n^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx.$$

Or, ψ_n est une fonction polynômiale de degré n à coefficient dominant $(-1)^n$, donc pour tout $x \geq 0$, $\psi_n^{(n)}(x) = (-1)^n n!$, donc

$$\begin{aligned}\|\psi_n\|_\alpha^2 &= (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_n^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx = (-1)^n \int_0^{+\infty} (-1)^n n! \varphi_n(x)dx \\ &= n! \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha} e^{-x} dx = n!\Gamma(n+\alpha+1).\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \|\psi_n\|_\alpha^2 = n!\Gamma(n+\alpha+1).}$$

III. Approximation

18. De la même façon qu'à la question 16, on peut montrer par récurrence que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}\langle \psi_n, f_k \rangle &= (-1)^i \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-i)}(x) f_k^{(i)}(x)dx = (-1)^i \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-i)}(x)(-k)^i e^{-kx}dx \\ &= k^i \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-i)}(x) e^{-kx}dx.\end{aligned}$$

Donc en particulier pour $i = n$, on obtient :

$$\begin{aligned}\langle \psi_n, f_k \rangle &= k^n \int_0^{+\infty} \varphi_n(x) e^{-kx}dx = k^n \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha} e^{-(k+1)x}dx \\ &= k^n \int_0^{+\infty} \frac{u^{n+\alpha}}{(k+1)^{n+\alpha}} e^{-u} \frac{du}{k+1} \quad \text{(changement de variable } u = (k+1)x \text{ affine donc licite)} \\ &= \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n \int_0^{+\infty} u^{n+\alpha} e^{-u}du = \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n \Gamma(n+\alpha+1).\end{aligned}$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 17, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} &= \frac{\left(\frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n \Gamma(n+\alpha+1)\right)^2}{n!\Gamma(n+\alpha+1)} \\ &= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \\ &= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} a_n \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n \quad \text{(où } a_n \text{ a été introduit à la question 3)}\end{aligned}$$

donc, d'après les questions 3 et 4, comme $\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \in]-1, 1[$, $\sum_{n\geq 0} a_n \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n$ converge donc :

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} a_n \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n \text{ converge}}$$

et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} &= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(1 - \left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^{\alpha+1}} \\ &= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\frac{2k+1}{(k+1)^2}\right)^{\alpha+1}} = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(\alpha+1)(k+1)^{2\alpha+2}}{(2k+1)^{\alpha+1}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}.}$$

19. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, V_N est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E_α et $\left(\dfrac{\psi_n}{\|\psi_n\|_\alpha}\right)_{n\in[\![0,N]\!]}$ en est une base orthonormée donc, d'après la question 7, on a :

$$\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha^2 = \|f_k\|_\alpha^2 - \sum_{n=0}^{N} \left\langle f_k, \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|_\alpha}\right\rangle^2 = \|f_k\|_\alpha^2 - \sum_{n=0}^{N} \frac{\langle f_k, \psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}.$$

De plus :

$$\begin{aligned}\|f_k\|_\alpha^2 &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} e^{-2kx} dx = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(2k+1)x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(2k+1)^\alpha} e^{-u} \frac{du}{2k+1} \quad \text{(changement de variable affine } u = (2k+1)x\text{)} \\ &= \frac{1}{(2k+1)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}.\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{\langle f_k, \psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha^2 = 0$.
D'où :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha = 0.}$$

20. D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_0$, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \leq \varepsilon$.
En particulier, pour $N = N_0$, on a $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \leq \varepsilon$ et $\pi_N(f_k) \in V_N = \mathrm{Vect}((\psi_n)_{0\leq n\leq N}) \subset \mathcal{P}$ en tant qu'espace vectoriel engendré par des éléments de $\mathcal{P}$ donc $p = \pi_N(f_k)$ convient.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } p \in \mathcal{P} \text{ telle que } \|f_k - p\|_\alpha \leq \varepsilon.}$$

21. Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} f(-\ln t) & \text{si } t \in]0,1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.
g est continue sur $]0,1]$ par opérations sur les fonctions continues (pour tout $t \in]0,1]$, $-\ln t \in [0,+\infty[$).
De plus, $\displaystyle\lim_{t\to0} g(t) = \lim_{t\to0} f\big(\underbrace{-\ln t}_{\to+\infty}\big) = 0 = g(0)$ (par hypothèse sur f) donc g est aussi continue en 0 et par suite, sur $[0,1]$.

Alors, d'après le théorème admis, il existe une fonction polynomiale $p : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k t^k$ telle que pour tout $t \in [0,1]$, $|g(t) - p(t)| \leq \varepsilon$.
On a alors, pour tout $x > 0$, comme $e^{-x} \in]0,1]$,

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x)\right| = \left|f(-\ln(e^{-x})) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (e^{-x})^k\right| = |g(e^{-x}) - p(e^{-x})| \leq \varepsilon \text{ donc } \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x)\right)^2 \leq \varepsilon^2.$$

On a donc, pour tout $x > 0$:

$$x^\alpha e^{-x} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x)\right)^2 \leq x^\alpha e^{-x} \varepsilon^2$$

donc par croissance de l'intégrale convergente (avec $0 \leq +\infty$), on a :

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x)\right)^2 dx = \left\|f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k\right\|_\alpha^2 \leq \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \varepsilon^2 = \varepsilon^2 \Gamma(\alpha+1).$$

En remplaçant ε par $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)}}$ dans le théorème admis, on a alors $\left\|f - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k\right\|_\alpha^2 \leq \varepsilon^2$ donc $\left\|f - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k\right\|_\alpha \leq \varepsilon$.

$$\boxed{\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } n \in \mathbb{N} \text{ et } (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tels que } \left\|f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k\right\|_\alpha \leq \varepsilon.}$$

22. Soit $\varepsilon > 0$.
D'après la question précédente, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n}$ tels que $\left\|f - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k\right\|_\alpha \leq \varepsilon$.

De plus, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, d'après la question 20, il existe $p_k \in \mathcal{P}$ tel que $\|f_k - p_k\|_\alpha \le \varepsilon$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\left\|f - \sum_{k=0}^n \lambda_k p_k\right\|_\alpha &= \left\|f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k + \sum_{k=0}^n \lambda_k (f_k - p_k)\right\|_\alpha \\ &\le \left\|f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k\right\|_\alpha + \sum_{k=0}^n |\lambda_k| \, \|f_k - p_k\|_\alpha \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\le \varepsilon + \sum_{k=0}^n |\lambda_k| \varepsilon = \left(1 + \sum_{k=0}^n |\lambda_k|\right)\varepsilon.\end{aligned}$$

En posant $p = \sum_{k=0}^n \lambda_k p_k \in \mathcal{P}$, et en remplaçant ε par $\varepsilon/\left(1 + \sum_{k=0}^n |\lambda_k|\right)$ au début de la réponse, on obtient $\|f - p\|_\alpha \le \varepsilon$.

$$\boxed{\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } p \in \mathcal{P} \text{ telle que } \|f - p\|_\alpha \le \varepsilon.}$$

23. Soit $f : x \in [0, +\infty[\mapsto h(\sqrt{x}) e^{x/2}$.
h est continue sur $\mathbb{R}_+$ et a une limite nulle en $+\infty$ (car elle est nulle sur $]A^2, +\infty[$) donc d'après la question 22, pour tout $\alpha > -1$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f - p\|_\alpha \le \varepsilon$.
Or, on a :

$$\begin{aligned}\|f - p\|_\alpha &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} (f(x) - p(x))^2 dx = \int_0^{+\infty} x^\alpha (f(x) e^{-x/2} - p(x) e^{-x/2})^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^\alpha (h(\sqrt{x}) - p(x) e^{-x/2})^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} t^{2\alpha} (h(t) - p(t^2) e^{-t^2/2})^2 2t dt\end{aligned}$$

en posant le changement de variable $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2$.
Ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant sur $\mathbb{R}_+^*$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Alors, en prenant $\alpha = -1/2$ (et le p correspondant à cette valeur de α) et $q : t \in \mathbb{R} \mapsto p(t^2)$, qui est une fonction polynômiale paire, on a :

$$\begin{aligned}\|f - p\|_{-1/2} &= \int_0^{+\infty} t^{2\alpha} (h(t) - p(t^2) e^{-t^2/2})^2 2t dt = 2 \int_0^{+\infty} (h(t) - q(t) e^{-t^2/2})^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - q(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2 dx\end{aligned}$$

(par le changement de variable affine $t = -x$ dans l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \left(h(x) - q(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2 dx$ pour exploiter la parité de la fonction intégrée). Ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - q(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2 dx = \|f - p\|_{-1/2} \le \varepsilon.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe une fonction polynômiale } p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ telle que } \int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - q(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2 dx \le \varepsilon.}$$