DEVOIR SURVEILLÉ 5 - 05/02/25 - *Durée 4h*

Sujet 3 - Type X-ENS

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Matrices infiniment divisibles

Notations :

On désigne par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes et n colonnes. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $\det(M)$ son déterminant. On désigne par $\mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices symétriques. On note $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice identité. On identifie $\mathbf{R}^n$ et l'espace des matrices à n lignes et 1 colonne.

Première partie : la fonction Γ

1a. Montrer que pour tout réel $s > 0$, la fonction $x \mapsto e^{-x}x^{s-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On pose alors $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x$.

1b. Calculer $\Gamma(m)$ pour m entier strictement positif.

1c. Montrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

2a. Montrer que pour tout entier strictement positif m et pour $x \in [0, m]$, $\left(1 - \dfrac{x}{m}\right)^m \leqslant e^{-x}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = e^{-x}$.

2b. Montrer que $\displaystyle\int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1}\,\mathrm{d}x = \frac{m!m^s}{s(s+1)\cdots(s+m)}$, pour tout réel $s > 0$ et pour tout entier m. (On pourra procéder par intégrations par parties successives).

2c. Montrer que pour tout réel $s > 0$, $\Gamma(s) = \displaystyle\lim_{m\to+\infty} \frac{m!m^s}{s(s+1)\cdots(s+m)}$.

Deuxième partie : matrices positives et produit de Hadamard

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On dit que A est positive si A est symétrique et

$$\forall X = (x_1 \cdots x_n)^\top \in \mathbf{R}^n, \quad \langle X, AX\rangle = X^\top AX = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j \geqslant 0$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien standard sur $\mathbf{R}^n$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{SM}_2(\mathbf{R})$. Montrer que A est positive si et seulement si $a \geqslant 0, d \geqslant 0$, $\det(A) \geqslant 0$.

4. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$. Montrer que A est positive si et seulement si ses valeurs propres sont des réels positifs ou nuls. *On demande la preuve de ce résultat de cours.*

5. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ une matrice positive, et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels. Montrer que, posant $b_{ij} = \lambda_i \lambda_j a_{ij}$, la matrice $B = (b_{ij})$ est positive.

6. Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel préhilbertien réel, pour lequel le produit scalaire de deux éléments $x, y \in \mathcal{H}$ est noté $\langle x, y \rangle$. Soient $u_1, \cdots, u_n \in \mathcal{H}$. On pose $a_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$. Montrer que la matrice $A = (a_{ij})$ est positive.

   Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   Leur produit de Hadamard est la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ donné par : $c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$.
   On désignera cette opération par le signe $* : C = A * B$.

7. Montrer que si $A \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ est une matrice positive et si B est une matrice diagonale à coefficients diagonaux positifs ou nuls, alors $A * B$ est une matrice positive.

8a. Montrer que si $A \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ est une matrice positive, elle peut s'écrire comme somme de matrices de la forme $YY^\top = (y_1 \cdots y_n)^\top (y_1 \cdots y_n)$, où $Y = (y_1 \cdots y_n)^\top \in \mathbf{R}^n$. On pourra commencer par le cas où A est diagonale.

8b. Montrer que si $A, B \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ sont des matrices positives, alors $A * B$ est une matrice positive.

Troisième partie : matrices infiniment divisibles

On considère maintenant des matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls. Il résulte de la question **8b.** que si A est positive, alors pour tout entier $r > 0$, la matrice $A^{*r} = \left(a_{ij}^r\right)$ est positive. On dit qu'une matrice symétrique A à coefficients a_{ij} positifs ou nuls est infiniment divisible si pour tout **réel** $r > 0$, la matrice $\left(a_{ij}^r\right)$ est positive. On désignera encore, lorsque r est un réel strictement positif, par A^{*r} la matrice $(\ a_{ij}^r\ )$.

9a. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ une matrice symétrique positive à coefficients positifs ou nuls. Montrer qu'elle est infiniment divisible.

9b. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est positive. Déterminer les valeurs de $r > 0$ pour lesquelles A^{*r} est positive.

10. Montrer que si $A = (a_{ij})$ est infiniment divisible et si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont des réels strictement positifs, alors posant $b_{ij} = \lambda_i \lambda_j a_{ij}$, la matrice $B = (b_{ij})$ est infiniment divisible.

11a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = x$.

11b. Soit A une matrice symétrique à coefficients positifs ou nuls. Montrer que si pour tout entier $m \geqslant 1, A^{*\frac{1}{m}}$ est positive, alors A est infiniment divisible.

12. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels strictement positifs. On forme la matrice $C = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \dfrac{1}{\lambda_i + \lambda_j}$ et on se propose de montrer qu'elle est infiniment divisible.

Soit $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs réelles, dont le carré est intégrable. On munit $\mathcal{H}$ du produit scalaire : pour $f, g \in \mathcal{H}$, $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
On pose, pour tout $t \geqslant 0, u_i(t) = e^{-\lambda_i t}$.

12a. Calculer $\langle u_i, u_j \rangle$ et en déduire que C est positive.

12b. Montrer que pour $r > 0$ et $\alpha > 0$, $\dfrac{1}{\alpha^r} = \dfrac{1}{\Gamma(r)} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t\alpha} t^{r-1}\, \mathrm{d}t$.

12c. Soit, pour $r > 0$, $\mathcal{H}_r$ l'ensemble des fonctions continues u sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs réelles telles que la fonction $t \mapsto u(t)^2 t^{r-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$. On admet que c'est un espace vectoriel. Montrer que si on pose, pour $u, v \in \mathcal{H}_r$, $\langle u, v \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v(t)t^{r-1}\, \mathrm{d}t$, on munit $\mathcal{H}_r$ d'un produit scalaire.

12d. Montrer que C est infiniment divisible.

13. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels strictement positifs. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$ on pose $k_{ij} = \dfrac{\Gamma(\lambda_i + \lambda_j + 1)}{\Gamma(\lambda_i + 1)\Gamma(\lambda_j + 1)}$.
On se propose de montrer que la matrice $K = (k_{ij})$ est infiniment divisible.

13a. Montrer que $k_{ij} = \displaystyle\lim_{m \to +\infty} \frac{1}{m \cdot m!} \prod_{p=1}^{m+1} \frac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{(\lambda_i + \lambda_j + p)}$.

13b. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$, la matrice $\left(\dfrac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{(\lambda_i + \lambda_j + p)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est infiniment divisible.

Conclure.

Quatrième partie : matrices conditionnellement positives

On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est conditionnellement positive si elle est symétrique et si pour tout $X = (x_1 \cdots x_n)^\mathsf{T} \in \mathbf{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = 0$, on a

$$X^\mathsf{T} A X = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j \geqslant 0.$$

14. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels strictements positifs. Posons $a_{ij} = -\ln(\lambda_i + \lambda_j)$.
Montrer que $A = (a_{ij})$ est conditionnellement positive. (Pour $X = (x_1 \cdots x_n)^\mathsf{T} \in \mathbf{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = 0$, on pourra introduire la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$f(r) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j \left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}\right)^r$$

et utiliser les résultats de la question 12).

15. Notons J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Soit $B \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$. Considérons les deux conditions suivantes :
(i) B est conditionnellement positive.
(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0$ tel que la matrice $B + \varepsilon I_n + \lambda J$ est positive.
Montrer que (ii) implique (i).

On admettra dans la suite que ces deux conditions sont en fait équivalentes.

16a. On suppose que $A = (a_{ij})$ est infiniment divisible et que tous les coefficients de A sont strictement positifs. Montrer que la matrice $(\ln a_{ij})$ est conditionnellement positive.

16b. Réciproquement, supposons que la matrice $B = (b_{ij})$ est conditionnellement positive. En considérant pour tout $\varepsilon > 0$ une matrice $C = (c_{ij}) = B + \varepsilon I_n + \lambda J$ comme au 15., montrer que pour tout $r > 0$, la matrice $(\exp(rc_{ij}))$ est positive. En déduire que la matrice $(\exp(rb_{ij}))$ est positive.

17a. Soient $z_1, \cdots, z_n$ des nombres complexes. Montrer que la matrice $\left(e^{-|z_i - z_j|^2}\right)$ est infiniment divisible.

17b. Soient $z_1, \cdots, z_n$ des nombres complexes. Montrer que pour tout $t > 0$, la matrice de coefficients $\dfrac{1}{t + |z_i - z_j|^2}$ est positive, puis que la matrice de coefficients $-\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \frac{|z_i - z_j|^2}{t + |z_i - z_j|^2}\, dt$ est conditionnellement positive.

17c. Montrer que la matrice $\left(e^{-|z_i - z_j|}\right)$ est infiniment divisible.