DEVOIR SURVEILLÉ 5 Sujet 3

Corrigé

Corrigé de la question 11.a)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a par définition de la partie entière, $\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1$ donc $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x < \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n}$.
On pose alors $q_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.
La suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x - q_n < \dfrac{1}{n}$.
Par encadrement, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} (x - q_n) = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = x$.

X ENS PC 2011 - Corrigé de Denis Lepelletier

Partie I

1) a) Soit f_s la fonction définie sur $I =]0,\, +\infty[$ par $f_s(x) = \mathrm{e}^{-x}x^{s-1}$. On va montrer que f_s est intégrable sur I (et non sur $[0,\, +\infty[$).

f_s est continue sur I donc intégrable sur tout segment $[a,\, b]$ tel que $0 < a < b$. L'intégrabilité est un problème local en 0 et en $+\infty$.

En 0 on exploite $f_s(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{s-1}$ et cette dernière fonction est intégrable sur $]0,\, a]$. Donc f_s l'est aussi.

En $+\infty$ on exploite que $x^2 f_s(x) = \mathrm{e}^{-x}\, x^{s+1}$ a pour limite 0. Donc $f_s(x) = \underset{x\to+\infty}{0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Cela assure l'intégrabilité de f_s sur $[b,\, +\infty[$. Finalement $\boxed{f_s \text{ est intégrable sur } I =]0,\, +\infty[}$.

b) On intègre par parties sur $[a,\, b]$: $\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1}\, dx = \frac{1}{s}\left[-\mathrm{e}^{-x}\, x^s\right]_a^b + \frac{1}{s}\int_a^b \mathrm{e}^{-x}\, x^s\, dx$.

On passe à la limite quand a tend vers 0 et quand b tend vers $+\infty$. Le crochet tend vers 0 car $s > 0$ donc $\boxed{\Gamma(s) = \dfrac{1}{s}\Gamma(s+1)}$.

Avec $\Gamma(1) = 1$ on en déduit facilement : $\Gamma(m) = (m-1)\,!$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

c) Pour tout $s > 0$, $\Gamma(s) = \displaystyle\int_I \varphi(s,x)\, dx$ où l'on a posé : $\varphi(s,x) = \mathrm{e}^{-x}x^{s-1}$.

Pour que Γ soit continue sur I il suffit de satisfaire les conditions :

** $\forall x \in I$ la fonction $s \mapsto \varphi(s,x)$ est continue sur I

** $\forall s \in I$, la fonction $x \mapsto \varphi(s,x)$ est continue par morceaux sur I

** Il existe une fonction $\psi \;:\; I \to \mathbb{R}_+$ intégrable sur I telle que pour tout $(s,x) \in I^2$, $|\varphi(s,x)| \le \psi(x)$ (condition de domination).

Pour cette dernière condition on peut remplacer I^2 par $[\alpha,\, \beta] \times I$ où $[\alpha,\, \beta]$ est un segment quelconque inclus dans I.

Les deux premières contitions sont clairement satisfaites.

Pour la domination on observe que lorsque $(s,x) \in [\alpha,\beta] \times I$:
si $x \ge 1$ alors $x^{s-1} \le x^{\beta-1}$ donc $0 \le \varphi(s,x) \le \varphi(\beta,x)$
si $0 < x \le 1$ alors $x^{s-1} \le x^{\alpha-1}$ donc $0 \le \varphi(s,x) \le \varphi(\alpha,x)$
Dans tous les cas : $0 \le \varphi(x,s) \le \varphi(\beta,x) + \varphi(\alpha,x)$. En posant $\psi(x) = \varphi(\beta,x) + \varphi(\alpha,x)$ la fonction ψ est intégrable sur I et la condition de domination (sous forme faible) est satisfaite.

Donc $\boxed{\text{la fonction } \Gamma \text{ est continue sur } I =]0,\, +\infty[}$.

2) a) L'inégalité est évidente si $x = m$.

Si $0 \le x < m$ alors $\left(1 - \dfrac{x}{m}\right)^m = \exp\left[m \ln\left(1 - \dfrac{x}{m}\right)\right]$. L'inégalité usuelle $\ln(1+t) \le t$ donne $\ln\left(1 - \dfrac{x}{m}\right) \le -\dfrac{x}{m}$ donc $m\ln\left(1 - \dfrac{x}{m}\right) \le -x$.

La fonction exp est croissante donc $\boxed{\left(1 - \dfrac{x}{m}\right)^m \le \mathrm{e}^{-x}}$

x étant choisi dans $\mathbb{R}$ on a $x < m$ pour m assez grand. Donc pour m assez grand, $\left(1 - \dfrac{x}{m}\right)^m = \exp\left[m\ln\left(1 - \dfrac{x}{m}\right)\right]$. L'équivalent usuel $\ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t$ donne immédiatement : $\displaystyle\lim_{m\to\infty} m\ln\left(1 - \frac{x}{m}\right) = -x$.

La fonction exp étant continue il vient : $\boxed{\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = \mathrm{e}^{-x}}$.

b) Soient $m, k \in \mathbb{N}, s > 0$. L'existence de l'intégrale $T(m,k,s) = \displaystyle\int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^k x^{s-1}\,dx$ s'établit avec la même étude locale en 0 qu'en 1)a).

Une intégration par parties analogue à celle de 1)b) donne : $T(m,k,s) = \dfrac{k}{ms} T(m, k-1, s+1)$. D'où par une chaîne d'égalités : $T(m,k,s) = \dfrac{k\,!}{m^k\, s(s+1)\dots(s+k-1)} T(m, 0, s+k)$.

Or $T(m,0,s+k) = \dfrac{m^{s+k}}{s+k}$. Donc $T(m,k,s) = \dfrac{k\,!\,m^s}{s(s+1)\dots(s+k)}$. Donc $\boxed{T(m,m,s) = \dfrac{m\,!\,m^s}{s(s+1)\dots(s+m)}}$.

On peut aussi commencer par le changement de variable $x = mt,\ dx = m\,dt$.

c) On introduit une suite $(h_m)_{m\geq 1}$ de fonctions définies sur $I =]0, +\infty[$ par $h_m(x) = \left(1 - \dfrac{x}{m}\right)^m x^{s-1}$ si $0 < x \leq m$ et $h_m(x) = 0$ si $x \geq m$.

La question 2a) assure que pour tout $m \geq 1$ et tout $x \in I$, $|h_m(x)| \leq f_s(x)$ (indépendant de m). La suite de fonctions $(h_m)_m$ est dominée sur I par la fonction f_s intégrable sur I.

D'autre part pour tout $x \in I$ on a $h_m(x) = \left(1 - \dfrac{x}{m}\right)^m x^{s-1}$ pour m assez grand. La question 2)a) assure aussi que la suite $(h_m)_m$ converge simplement sur I vers la fonction f_s.

Le théorème de la convergence dominée peut donc s'appliquer. Il vient : $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \int_I h_m = \int_I \left(\lim_{m\to\infty} h_m\right)$.

Le membre de droite est $\displaystyle\int_I f_s = \Gamma(s)$.

Au membre de gauche, $\displaystyle\int_I h_m = \int_0^m h_m(x)\,dx = T(m,m,s) = \frac{m\,!m^s}{s(s+1)\dots(s+m)}$ d'après 2)b).

Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{m\,!\,m^s}{s(s+1)\dots(s+m)} = \Gamma(s)}$.

Partie II

3) On suppose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ positive. Avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ il vient : $a = {}^t e_1 A e_1 \geq 0$. De même avec $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $d \geq 0$.

De plus pour tout réel t en prenant $X = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$: $at^2 + 2bt + c = {}^t XAX \geq 0$. Si $a \neq 0$ alors le discriminant est négatif ou nul donc $b^2 - ac \leq 0$ donc $\det A \geq 0$. Si $a = 0$ il reste pour tout réel t : $2bt + c \geq 0$. En envisageant la limite quand $t \to \pm\infty$ on voit que $b = 0$. Donc $\det A = 0$.

Réciproquement, on suppose $a \geq 0, c \geq 0, \det A \geq 0$.

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors ${}^t XAX = ax^2 + 2bxy + cy^2$

Si $a > 0$ alors $ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left[\left(x + \dfrac{b}{a}y\right)^2 + \dfrac{\det A}{a^2} y^2\right] \geq 0$.

Si $a = 0$ alors $\det A \geq 0$ donne $b = 0$. Donc $ax^2 + 2bxy + cy^2 \geq 0$.

Dans les deux cas la matrice symétrique A est positive.

4) On suppose A positive. Vu qu'elle est symétrique réelle elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ donc ses valeurs propres sont réelles. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Alors $AX = \lambda X$ et ${}^t XAX = \lambda\, {}^t XX = \lambda \|X\|^2$. Donc $\boxed{\lambda = \dfrac{{}^t XAX}{\|X\|^2} \geq 0}$.

Réciproquement, on suppose que les valeurs propres de A sont toutes positives ou nulles. L'endomorphisme L_A canoniquement associé à A est auto-adjoint. Le théorème spectral assure qu'il est diagonalisable dans une base orthonormale $(u_1, \dots, u_n)$: $L_A(u_i) = Au_i = \lambda_i u_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R}_+$.

Alors pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. Donc $AX = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i u_i$.

Vu que la base est orthonormale, ${}^tXAX =< X, AX >= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i \geq 0$. Donc $\boxed{A \text{ est positive}}$.

5) La matrice B est clairement symétrique. De plus pour tout $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXBX = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \lambda_i \lambda_j x_i x_j = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} (\lambda_i x_i)(\lambda_j x_j) = {}^tYAY$ où $Y = {}^t(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$. Donc ${}^tXBX \geq 0$ donc $\boxed{B \text{ est positive}}$.

6) La matrice A est clairement symétrique. De plus pour tout $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$${}^tXAX = \sum_{1 \leq i,j \leq n} < u_i, u_j > x_i x_j = \sum_{1 \leq i,j \leq n} < x_i u_i, x_j u_j >= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \right\rangle = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \right\|^2 \geq 0.$$

Donc $\boxed{B \text{ est positive}}$

7) $C = A * B$ est une matrice diagonale de coefficients diagonaux $a_{i,i} b_{i,i}$. Elle est donc symétrique.

Pour tout $i \in [|1, n|]$, $a_{i,i} = {}^te_i A e_i \geq 0$ et de même pour $b_{i,i}$. Donc pour tout i, $c_{i,i} \geq 0$. Les valeurs propres de C sont les $c_{i,i}$ et la question 4) assure que $\boxed{C \text{ est positive}}$.

8) a) Si A est diagonale alors $A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i}$, la matrice $E_{i,i}$ ayant ses coefficients tous nuls sauf celui de position (i, i) qui vaut 1 et les $a_{i,i}$ sont ≥ 0.

Or $E_{i,i} = e_i\, {}^te_i$. Donc $A = \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{a_{i,i}} e_i)\ {}^t(\sqrt{a_{i,i}} e_i)$.

Si A est positive quelconque on peut la diagonaliser au moyen d'une matrice orthogonale : il existe D diagonale et P orthogonale telles que $A = PD\,{}^tP$.

D est symétrique et a ses valeurs propres sont celles de A donc sont positives ou nulles. Donc D est positive et l'on vient de voir qu'il existe des vecteurs $Y_1, \dots, Y_n$ tels que $D = \sum_{i=1}^{n} Y_i\, {}^tY_i$.

Alors $\boxed{A = {}^tPDP = \sum_{i=1}^{n} (PY_i)\, {}^t(PY_i), \text{ où chaque } {}^t(PY_i) \text{ est un vecteur de } \mathbb{R}^n}$.

b) Posons $C = A * B$, elle est clairement symétrique. Si $A = {}^t(y_1, \dots, y_n)(y_1, \dots, y_n)$ alors $a_{i,j} = y_i y_j$ et $c_{i,j} = y_i y_j b_{i,j}$. La question 5) assure que C est positive.

Dans le cas général la question 8)a) permet de décomposer A en somme de matrices de la forme ci-dessus. La matrice C est donc somme de matrices positives. Avec la définition on voit que $\boxed{C = A * B \text{ est positive}}$.

Partie III

9) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice positive de taille 2 et à coefficients a, b, c positifs ou nuls. Alors pour tout $r > 0$, $A^{*r} = \begin{pmatrix} a^r & b^r \\ b^r & c^r \end{pmatrix}$.

La question 3) assure $ac \geq b^2$. Vu qu'il s'agit de réels positifs il vient : $(ac)^r \geq (b^2)^r$. Donc $\det A^{*r} \geq 0$. De plus $a^r \geq 0,\ c^r \geq 0$. La question 3) assure maintenant que $\boxed{A^{*r} \text{ est positive}}$.

a) A est symétrique et on voit facilement que les valeurs propres de A sont $0, 1, 3$. La question 4) assure que $\boxed{A \text{ est positive}}$.

$A^{*r} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2^r & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\det A^{*r} = 2^r - 2$. Si $0 < r < 1$ alors $\det A^{*r} < 0$ donc l'une au moins des valeurs propres de A^{*r} est strictement négative. Donc A^{*r} n'est pas positive.

On voit facilement que son polynôme caractéristique est $Q(X) = (1 - X)\left[X^2 - (2^r + 1)X + 2^r - 2\right]$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et les racines λ_2, λ_3 du facteur de degré 2. Supposons $r > 1$. Alors $\lambda_2\lambda_3 = 2^r - 2 > 0$ donc λ_2, λ_3 sont de même signe. Ce signe est $+$ car $\lambda_2 + \lambda_3 = 2^r + 1 > 0$. Donc A^{*r} est positive.

$\boxed{A^{*r} \text{ est positive si et seulement si } r \geq 1}$.

10) Immédiat avec la question 5).

11) L'hypothèse sur A et la partie II assurent que pour tout entier $p > 0$ et tout entier $m > 0$, la matrice $A^{*p/m}$ est positive. Autrement dit, pour tout rationnel strictement positif r, la matrice A^{*r} est positive.

Soit maintenant $r \in \mathbb{R}_+^*$. La densité de $\mathbb{Q}$ assure qu'il existe une suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de rationnels strictements positifs qui converge vers r.

Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et tout $k \in \mathbb{N}$, ${}^tXA^{*r_k}A = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^{r_k} x_i x_j \geq 0$ car A^{*r_k} est positive.

Chaque fonction $t \mapsto a_{i,j}^t$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (si $a_{i,j}$ cette fonction est nulle ; sinon $a_{i,j}^t = \exp(t \ln a_{i,j})$

Par passage à la limite quand k tend vers l'infini on obtient : $\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^r x_i x_j \geq 0$. Vu que c'est établi pour tout X la matrice A^{*r} est positive. Donc $\boxed{A \text{ est infiniment divisible}}$.

12) a) Pour tout $a > 0$, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\, dt = \left[-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-at}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}$.

Donc $< u_i, u_j > = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda_i+\lambda_j)t}\, dt = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}$. La question 6) assure maintenant que $\boxed{C \text{ est positive}}$.

b) Immédiat avec le changement de variable sur l'intégrale : $x = \alpha t,\ dx = \alpha\, dt$.

c) On commence par montrer que la fonction $t \mapsto u(t)v(t)t^{r-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, par exemple au moyen de l'inégalité $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ pour $a = u(t)$ et $b = v(t)$.

La vérification des propriétés qui définissent un produit scalaire est de routine.

d) La matrice C est symétrique à coefficients strictement positifs. Le terme de position (i, j) de C^{*r} est $c_{i,j}^r = \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j)^r}$. Avec 12)b) et 12)c) il vient : $c_{i,j}^r = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_i t}\, \mathrm{e}^{-\lambda_i t}\, t^{r-1}\, dt = \frac{1}{\Gamma(r)} < u_i, u_j >$.

Donc $c_{i,j}^r = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\Gamma(r)}}\, u_i, \frac{1}{\sqrt{\Gamma(r)}}\, u_j \right\rangle$.

Donc C^{*r} est positive d'après la question 6). Donc $\boxed{C \text{ est infiniment divisible}}$.

13) a) $\Gamma(\lambda_i + 1) = \lim_{m\to\infty} u_m$ avec $u_m = \frac{m^{\lambda_i+1}\, m\,!}{(\lambda_i + 1)(\lambda_i + 2)\ldots(\lambda_i + m + 1)} = \frac{m^{\lambda_i+1}\, m\,!}{\prod_{p=1}^{m+1}(\lambda_i + p)}$

De même $\Gamma(\lambda_j + 1) = \lim_{m\to\infty} v_m$ et $\Gamma(\lambda_i + \lambda_j + 1) = \lim_{m\to\infty} w_m$.

Or $\frac{w_m}{u_m v_m} = \frac{1}{m\, m\,!} \prod_{p=1}^{m+1} \frac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{(\lambda_i + \lambda_j + p)}$. En passant à la limite quand m tend vers l'infini il vient :

$$\boxed{k_{i,j} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m\,m\,!} \prod_{p=1}^{m+1} \frac{(\lambda_i+p)(\lambda_j+p)}{(\lambda_i+\lambda_j+p)}}.$$

b) En posant $\mu_i = \lambda_i + \dfrac{p}{2}$ et en appliquant la question 12)d) on voit que la matrice de terme général $\dfrac{1}{\mu_i+\mu_j} = \dfrac{1}{\lambda_i+\lambda_j+p}$ est infiniment divisible.

En appliquant la question 10) avec les $\lambda'_i = \lambda_i + p$ on voit que la matrice de terme général $\dfrac{\lambda'_i\lambda'_j}{\mu_i+\mu_j} = \dfrac{(\lambda_i+p)(\lambda_j+p)}{\lambda_i+\lambda_j+p}$ est infiniment divisible.

En exploitant la question 8) (étendue à un produit de $m+1$ matrices) on voit que pour tout $r > 0$, tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $X \in \mathbb{R}^n$: $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \prod_{p=1}^{m+1} \left(\frac{(\lambda_i+p)(\lambda_j+p)}{\lambda_i+\lambda_j+p}\right)^r \ge 0$.

Donc aussi : $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \frac{1}{(m.m\,!)^r} \prod_{p=1}^{m+1} \left(\frac{(\lambda_i+p)^r(\lambda_j+p)^r}{(\lambda_i+\lambda_j+p)^r}\right) \ge 0$.

En passant à la limite quand m tend vers l'infini il vient : $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j k_{i,j}^r \ge 0$.

Donc $\boxed{\text{la matrice } K \text{ est infiniment divisible}}$.

Partie IV

14) Pour tout $r \ge 0$ on définit $f(r) = \displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \left(\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}\right)^r$.

Alors $f(0) = \displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = 0$. De plus f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec pour tout r, $f'(r) = -\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \left(\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}\right)^r \ln(\lambda_i+\lambda_j)$.

De plus pour tout $r > 0$, $f(r) \ge 0$ d'après la question 12)d). Donc $\dfrac{f(r)-f(0)}{r} \ge 0$ et par passage à la limite quand r tend vers 0, $f'(0) \ge 0$, soit $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j\ (-\ln(\lambda_i+\lambda_j)) \ge 0$.

Donc $\boxed{\text{la matrice } A \text{ est conditionnellement positive}}$.

15) Soient $X = {}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\lambda > 0$ tel que $B + \varepsilon I_n + \lambda J$ soit positive. Donc ${}^tXBX + \varepsilon\, {}^tXX + \lambda\, {}^tXJX \ge 0$.

Mais $JX = 0$ car la somme des x_i est nulle. Il reste : ${}^tXBX + \varepsilon\, {}^tXX \ge 0$. C'est établi pour tout $\varepsilon > 0$ donc par passage à la limite quand ε tend vers 0 : ${}^tXBX \ge 0$.

Donc $\boxed{\text{la matrice } B \text{ est conditionnellement positive}}$.

16) a) Raisonnement analogue à celui de la question 14).

b) La matrice C étant positive les matrices C^{*m}, $m \ge 1$ le sont aussi d'après la partie II. De plus $C^{*0} = J$ est aussi positive car ${}^tXJX = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$.

La matrice $\displaystyle\sum_{m=0}^{N} \frac{r^m}{m\,!} C^{*m}$ est donc positive pour tout $N \in \mathbb{N}$. Avec un passage à la limite quand N tend vers l'infini sur la somme ${}^tX \left(\displaystyle\sum_{m=0}^{N} \frac{r^m}{m\,!} C^{*m} \right) X$ on voit que $\boxed{\text{la matrice de terme général } \exp(rc_{i,j}) \text{ est positive}}$.

Avec un passage à la limite quand ε tend vers 0 on voit que $\boxed{\text{la matrice de terme général } \exp(rb_{i,j}) \text{ est positive}}$.

Il en résulte que la matrice de terme général $\exp(rb_{i,j})$ est infiniment divisible.

17) a) Soit M la matrice de terme général $\mathrm{e}^{-|z_i-z_j|^2}$. Le terme général de M^{*r} est $\mathrm{e}^{-r|z_i-z_j|^2}$. Pour que M soit infiniment divisible il suffit d'après la question 16)b) que la matrice U de terme général $-|z_i - z_j|^2$ soit conditionnellement positive.

Or $|z_i - z_j|^2 = |z_i|^2 + |z_j|^2 - z_i\overline{z_j} - z_j\overline{z_i}$.

Soit $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_i x_j |z_i|^2 = x_i|z_i|^2 \sum_{j=1}^{n} x_j = 0$. Donc $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j |z_i|^2 = 0$. De même $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j |z_j|^2 = 0$.

De plus $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le}^{n} x_i x_j z_i \overline{z_j} = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \right|^2$ et de même pour la somme conjuguée. Donc ${}^tXUX = -\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} u_{i,j} x_i x_j = 2\left| \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \right|^2 \geq 0$. La matrice U est contionnellement positive ce qui qui termine la preuve.

b) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $c_{i,j} = c_{i,j}(t) = \dfrac{1}{t + |z_i - z_j|^2}$ et $b_{i,j} = -\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-1/2} \frac{|z_i - z_j|^2}{t + |z_i - z_j|^2}\, dt$.

On justifie facilement l'existence de cette dernière intégrale.

Observons que $c_{i,j} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r\left(t+|z_i-z_j|^2\right)}\, dr$.

Donc pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXCX = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left[\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \mathrm{e}^{-r\left(t+|z_i-z_j|^2\right)} \right] dr$.

On vient de montrer que la matrice de terme général $\mathrm{e}^{-r|z_i-z_j|^2}$ est positive. Il est immédiat que la matrice de terme général e^{-rt} l'est aussi. Leur produit de Hadamard est donc une matrice positive ce qui assure que ${}^tXCX \geq 0$. Donc $\boxed{\text{la matrice } C \text{ de coefficients } \dfrac{1}{t + |z_i - z_j|^2} \text{ est positive}}$.

Soit $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Alors ${}^tXBX = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ où :

$$f(t) = -t^{-1/2} \sum_{1\le i,j\le n} \frac{|z_i - z_j|^2}{t + |z_i - z_j|^2} x_i x_j = -t^{-1/2} \sum_{1\le i,j\le n} \left[1 - \frac{t}{t + |z_i - z_j|^2} \right] x_i x_j.$$

Mais $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j = 0$ donc $f(t) = t^{-1/2} \displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} \frac{t}{t + |z_i - z_j|^2} x_i x_j = t^{1/2} \sum_{1\le i,j\le n} c_{i,j}(t) x_i x_j$.

Vu que C est positive, $f(t) \geq 0$ pour tout $t > 0$. Donc ${}^tXBX \geq 0$.

On a montré que $\boxed{B \text{ est conditionnellement positive}}$.

c) Calculons $b_{i,j}$: En posant $\alpha = |z_i - z_j|$, $-b_{i,j} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-1/2} \frac{\alpha^2}{t+\alpha^2}\, dt$. Avec le changement de variable $x = t^{1/2}$ il vient : $-b_{i,j} = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\alpha^2}{x^2+\alpha^2}\, dx$

Si $\alpha > 0$ alors $-b_{i,j} = 2\alpha \left[\arctan \dfrac{x}{\alpha}\right]_0^{+\infty} = \pi\alpha$ et cette valeur reste valable si $\alpha = 0$. Donc $b_{i,j} = -\pi\alpha = -\pi|z_i - z_j|$.

La question 16)b) assure que la matrice $(\exp r b_{i,j})) = (\exp(-r\pi|z_i - z_j|))$ est positive pour tout $r > 0$.

Donc $\boxed{\text{la matrice } \left(\mathrm{e}^{-|z_i - z_j|}\right) \text{ est infiniment divisible}}$.