Corrigé du Sujet Mines-Ponts MP 2 2020 de Mathématiques

1. On a d'une part par la formule du binôme $(X+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k$ et d'autre part par produit de Cauchy, en exploitant la convention $\binom{a}{b} = 0$ lorsque $b > a$

$$(X+1)^n(X+1)^n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} X^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell}\binom{n}{k-\ell}\right) X^k.$$

Ces deux polynômes sont égaux, et il vient identifiant les coefficients de X^n dans ces deux expressions et en exploitant la symétrie des coefficients binomiaux

$$\binom{2n}{n} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}\binom{n}{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}^2$$

comme voulu.

2. On sait que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ d'où

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \sqrt{2\pi 2n}}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} 2\pi n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

et $c = \frac{1}{\sqrt{\pi}} > 0$ convient.

3. Comme $\alpha > 0$, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par comparaison entre série et intégrale, on a pour tout $k \geqslant 2$

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

Pour $n \geqslant 2$, on somme l'inégalité de gauche de $k = 1$ à $n-1$ et celle de droite de $k = 2$ à n, et il vient par la relation de Chasles en ajoutant 1 à droite

$$\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = 1 + \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

On en déduit que

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leqslant 1$$

et comme $\alpha < 1$, $\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ diverge vers $+\infty$ d'où $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)$, autrement dit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Pour $\alpha > 1$, on peut de même sommer les inégalités ci-dessus de $k = n$ à $+\infty$ à gauche et de $k = n+1$ à $+\infty$ à droite, les convergences de la série et deux intégrales étant immédiates (série et intégrales de Riemann) ce qui fournit de même

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^\alpha} = \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

pour une conclusion similaire.

4. On pose $f : x \mapsto \frac{x}{\ln x}$ qui est de classe C^1 sur $[2, +\infty[$ et on remarque que

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}.$$

Toutes ces fonctions étant positives, et l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ étant divergente puisque $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln x}\right)$ et $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge, on a par intégration d'équivalents

$$I(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_2^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(2) = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$$

comme voulu. *On peut aussi faire une intégration par parties, comme suggéré par l'énoncé, ce qui n'apporte pas grand chose de plus simple.*

5. On a pour tout $x \in]-1,1[$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right)\right)(-x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!}\left(\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\right)x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^n$$

ce qu'on voulait.

6. Comme $0 \leqslant P(S_n = 0_d) \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum P(S_n = 0_d)x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à celui de $\sum x^n$, donc supérieur ou égal à 1, et de même pour G. Le théorème de dérivation des séries entières permet alors d'affirmer que F et G sont bien définies et de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

Les événements $(\{R = n\})_{n\in\mathbb{N}}$ étant deux à deux disjoints, la convergence de $\sum P(R = n)$ est assurée par σ-additivité. Pour tout $x \in [-1,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$|P(R = n)x^n| \leqslant P(R = n)$$

ce qui donne la convergence normale, donc uniforme de la série entière définissant G sur $[-1,1]$. Comme $x \mapsto P(R = n)x^n$ est continue sur cet intervalle pour tout $n \in \mathbb{N}$, G l'est également. En outre R n'est pas infini s'il prend une valeur entière, autrement dit

$$\{R \neq +\infty\} = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ \text{disjointe}}} \{R = n\}$$

d'où

$$P(R \neq +\infty) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(R = n) = G(1).$$

7. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, comme $R = k$ impose $S_k = 0$, on a

$$\{S_n = 0_d\ ;\ R = k\} = \{S_n - S_k + S_k = 0_d\ ;\ R = k\} = \{S_n - S_k = 0_d\ ;\ R = k\}$$

Or, d'une part

$$\{R = k\} = \{S_1 \neq 0\ ;\ \dots\ ;\ S_{k-1} \neq 0\ ;\ S_k = 0\}$$

et d'autre part $S_n - S_k = \sum_{\ell=k+1}^{n} X_k$, tandis que S_0, ..., S_k sont des fonctions de $(X_1,\dots,X_k)$. Par le lemme des coalitions, $S_n - S_k$ est indépendante de $(S_0,\dots,S_k)$, et donc les événements $\{S_n - S_k = 0_d\}$ et $\{R = k\}$ sont indépendants. Il vient

$$P(S_n = 0_d\ ;\ R = k) = P(S_n - S_k = 0_d)P(R = k).$$

Or, $S_n - S_k = \sum_{\ell=k+1}^{n} S_\ell$ (somme nulle lorsque $k = n$). Comme $(X_1,\dots,X_{n-k})$ a la même loi que $(X_{k+1},\dots,X_n)$ par hypothèse (la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est iid), on en déduit que $\sum_{\ell=1}^{n-k} S_\ell$ a même loi que $\sum_{\ell=k+1}^{n} S_\ell$, autrement dit que $S_n - S_k$ a même loi que S_{n-k} (également valable pour $k = n$), ce qui fournit

$$P(S_n = 0_d\ ;\ R = k) = P(R = k)P(S_{n-k} = 0_d).$$

Comme

$$\{S_n = 0_d\} = \{S_n = 0_d\} \cap \left(\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\} \\ \text{disjointe}}} \{R = k\}\right) = \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\} \\ \text{disjointe}}} (\{S_n = 0_d\} \cap \{R = k\})$$

et que $\{S_n = 0_d\} \cap \{R = \ell\} = \emptyset$ pour tout $\ell > n$ puisque $S_n = 0_d$ implique que la marche aléatoire revient au moins une fois en 0_d avant l'instant n, il reste

$$\{S_n = 0_d\} = \bigcup_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ \text{disjointe}}} (\{S_n = 0_d\} \cap \{R = k\})$$

et par σ-additivité et avec ce qui précède

$$P(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^{n} P(S_n = 0_d\ ;\ R = k) = \sum_{k=1}^{n} P(R = k)P(S_{n-k} = 0_d).$$

8. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0_d)x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} P(R = k)P(S_{n-k} = 0_d)\right)x^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(R = k)P(S_{n-k} = 0_d)\right)x^n$$

compte tenu de $P(R = 0) = 0$, et on reconnaît dans cette dernière somme le produit de Cauchy des séries entières définissant F et G, ce qui fournit bien

$$F(x) = 1 + F(x)G(x).$$

On a l'égalité $F(x)(1-G(x)) = 1$ pour tout $x \in [0,1[$. Elle impose notamment que $G(x) \neq 1$ pour tout $x \in [0,1[$, ce qui donne

$$F(x) = \frac{1}{1-G(x)}.$$

Si $P(R \neq +\infty) \neq 1$, il vient

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \frac{1}{1-P(R\neq +\infty)}$$

par continuité de G en 1 (question 6). Si $P(R \neq +\infty) = 1$, on obtient de même

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = +\infty.$$

9. Comme les $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont positifs, $x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ est croissante sur $[0,1]$ et possède donc une limite quand x tend vers 1^- dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Supposons que cette limite, notée ℓ, soit finie. On a alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, par positivité de tous les termes et croissance

$$\sum_{k=0}^{N} c_k x^k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \leqslant \ell.$$

On peut alors faire tendre x vers 1^- dans cette inégalité, ce qui fournit $\sum_{k=0}^N c_k \leqslant \ell$. La série $\sum c_k$ est alors à terme général positif et sommes partielles majorées, donc convergente, ce qui contredit notre hypothèse. On en conclut donc que

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = +\infty.$$

10. Supposons que $\sum P(S_n = 0_d)$ soit convergente. Par un argument analogue à celui mis en place pour G, on en déduit que F est continue sur $[-1,1]$, et en particulier que $\lim_{x\to 1^-} F(x) = F(1)$ existe dans $\mathbb{R}_+$. D'après l'étude de la question 8, ceci impose par contraposée que $P(R \neq +\infty) < 1$. Réciproquement, si $\sum P(S_n = 0_d)$ diverge, alors la question précédente montre que $\lim_{x\to 1^-} F(x) = +\infty$, et donc que $P(R \neq +\infty) = 1$ toujours par la question 8. On a bien l'équivalence souhaiutée.

11. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\{S_i \notin \{S_k,\ 0 \leqslant k \leqslant i-1\}\} = \{S_i - S_0 \neq 0\ ;\ S_i - S_1 \neq 0\ ;\ \ldots\ ;\ S_i - S_{i-1} \neq 0\}.$$

Or, pour tout $k \in [\![0, i-1]\!]$, on a avec un raisonnement similaire à celui de la question 7 que $(S_i - S_0, \ldots, S_i - S_{i-1})$ a même loi que $(S_i, \ldots, S_1)$. On en déduit que

$$P(Y_i = 1) = P(S_i \notin \{S_k,\ 0 \leqslant k \leqslant i-1\}) = P(S_i - S_0 \neq 0\ ;\ S_i - S_1 \neq 0\ ;\ \ldots\ ;\ S_i - S_{i-1} \neq 0) = P(S_i \neq 0\ ;\ \ldots\ ;\ S_1 \neq 0) = P(R > i)$$

comme voulu.

On remarque alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N_n = N_{n-1}$ si $S_n \in \{S_k,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$ et $N_n = N_{n-1} + 1$ si $S_n \notin \{S_k,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$, autrement dit que $N_n = N_{n-1} + Y_n$. Par télescopage, et compte tenu de $Y_0 = 1$, il en résulte que

$$N_n = \sum_{i=0}^{n} Y_i.$$

Par linéarité de l'espérance

$$E(N_n) = \sum_{i=0}^{n} E(Y_i) = \sum_{i=0}^{n} P(Y_i = 1) = \sum_{i=0}^{n} P(R > i)$$

puisque les (Y_i) sont des variables de Bernoulli, et avec la question précédente.

12. $R = +\infty$ si et seulement si $R > i$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, autrement dit

$$\{R = +\infty\} = \bigcap_{\substack{i\in\mathbb{N}^* \\ \text{croissante}}} \{R > i\}.$$

Par continuité décroissante, on en déduit que

$$P(R = +\infty) = \lim_{i\to+\infty} P(R > i)$$

et en particulier que cette limite existe. Par le théorème de Cesàro (admis), il vient bien

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E(N_n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} P(R > i) = \lim_{i\to+\infty} P(R > i) = P(R = +\infty).$$

13. Comme les X_i sont tous impairs, S_n est la somme de n termes impairs pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et est donc nécessairement de même parité que n. On en déduit que $P(S_{2n+1} = 0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'événement $\{S_{2n} = 0\}$ est réalisé si et seulement si la marche aléatoire a fait exactement en tout, et dans un ordre quelconque, n sauts vers la gauche et n sauts vers la droite lors de ses $2n$ premiers pas. Autrement dit, $S_{2n}=0$ si et seulement s'il existe une partie A à n éléments de $[\![1,2n]\!]$ telle que $X_i=1$ si $i\in A$, et $X_i=-1$ sinon. Il vient

$$\{S_{2n}=0\}=\bigcup_{\substack{A\in\mathscr{P}_n([\![1,2n]\!])\\ \text{disjointe}}}\left(\bigcap_{i\in A}\{X_i=1\}\right)\cap\left(\bigcap_{i\notin A}\{X_i=-1\}\right)$$

d'où par σ-additivité et indépendance des (X_i)

$$P(S_{2n}=0)=\sum_{A\in\mathscr{P}_n([\![1,2n]\!])}p^{\operatorname{Card}A}q^{\operatorname{Card}A}=(pq)^n\operatorname{Card}(\mathscr{P}_n([\![1,2n]\!]))=\binom{2n}{n}(pq)^n.$$

Remarque : on peut aussi introduire un schéma binomial en posant $Z_i=\mathbb{1}_{\{X_i=1\}}$, et on a alors $W=\sum_{i=1}^{2n}Z_i\sim\mathscr{B}(2n,p)$ et $\{S_{2n}=0\}=\{W=n\}$, ce qui redonne le résultat ci-dessus.

14. Pour $x\in]-1,1[$, on a par définition

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(S_n=0)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}(pq)^nx^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}(4pqx^2)^n=\frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}$$

avec la question 5, puis

$$G(x)=\frac{F(x)-1}{F(x)}=1-\sqrt{1-4pqx^2}$$

avec la question 8, en notant que F ne s'annule visiblement pas (sur son expression explicite). On a alors

$$P(R\neq+\infty)=G(1)=1-\sqrt{1-4pq}.$$

Remarquons que

$$1-4pq=1-4p(1-p)=1-4p+4p^2=(2p-1)^2=(p-q)^2$$

ce qui donne

$$P(R=+\infty)=1-P(R\neq+\infty)=|p-q|.$$

Pour obtenir le reste de la distribution de la loi de R, on développe $G(x)$ en série entière. On peut remarquer que pour tout $x\in]-1,1[$

$$G'(x)=\frac{4pqx}{\sqrt{1-4pqx^2}}=4pqxF(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}4\binom{2n}{n}(pq)^{n+1}x^{2n+1}.$$

Compte tenu de $G(0)=P(R=0)=0$, il vient

$$G(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}(pq)^{n+1}x^{2n+2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}(pq)^nx^{2n}.$$

Par unicité du développement en série entière, il vient $P(R=2n+1)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(R=0)=0$, et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$P(R=2n)=\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}(pq)^n.$$

On peut aussi écrire

$$\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}=\frac{2(2n-2)!}{(n-1)!n!}=\frac{(2n)!}{(2n+1)(n!)^2}=\frac{1}{2n+1}\binom{2n}{n}$$

qui est une expression ni meilleure ni moins bonne que la précédente, mais qui facilitera un tout petit peu l'évaluation ci-dessus.

15. On a avec la question 2

$$P(R=2n)=\frac{1}{(2n+1)4^n}\binom{2n}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}.\qquad(*)$$

Compte tenu de la nullité de $P(R=k)$ pour impair, on a

$$P(R>2n+1)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}P(R=2k).$$

Comme les suites intervenant dans $(*)$ sont positives et que $\sum\frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$ est convergente, on a par sommation d'équivalents (portant sur les restes)

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}P(R=2k)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^{3/2}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

en utilisant le résultat de la question 3. Avec le calcul effectué à la question 12, on sait que

$$E(N_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} P(R > k).$$

On a

$$P(R > 2\ell) = P(R > 2\ell+1) \underset{\ell\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi\ell}}$$

d'où $P(R > k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi k}}$. En sommant de nouveau ces équivalents (cas de divergence), il vient cette fois, toujours avec la question 3

$$\sum_{k=1}^{n} P(R > k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{8n}{\pi}}.$$

Finalement

$$E(N_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{8n}{\pi}}.$$

16. On a par décroissance de a et positivité de b

$$1 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \geqslant a_n \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} = a_n B_n$$

ce qui donne bien $a_n \leqslant \frac{1}{B_n}$. De même

$$1 = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{m-k} + \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_{m-k} \leqslant a_n \sum_{k=0}^{n} b_{m-k} + a_0 \sum_{k=n+1}^{m} b_{m-k} = a_n B_{m-n} + a_0(B_m - B_{m-n}).$$

17. On a avec ce qui précède pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{(1 - a_0(B_{m_n} - B_{m_n-n}))B_n}{B_{m_n-n}} \leqslant a_n B_n \leqslant 1.$$

Les hypothèses fournies donnent directement que le terme de gauche tend vers 1 quand n tend vers l'infini, de sorte que $a_n B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par le théorème d'encadrement, autrement dit

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{B_n}.$$

18. En reprenant une comparaison série-intégrale similaire à celle de la question 3 dans le cas de la divergence, on trouve que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$, et par une sommation d'équivalents similaire à celle de la question 15, il vient $B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} C \ln n$. On applique maintenant le résultat de la question précédente avec $m_n = \lfloor n \ln n \rfloor$ pour $n \geqslant 1$. Comme $n+1 \underset{n\to+\infty}{=} o(n \ln n)$ il existe un rang à partir duquel $n \ln n \geqslant n+1$ et donc $\lfloor n \ln n \rfloor \geqslant \lfloor n+1 \rfloor = n+1 > n$. En outre, l'encadrement $n \ln n - 1 < m_n \leqslant n \ln n$ fournit $m_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n$, et donc

$$B_{m_n-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(m_n - n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n \ln n - n) = \ln n + \ln(\ln n - 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n.$$

Enfin, l'équivalent $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n}$ fournit l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow b_n \leqslant \frac{2C}{n}$. Comme $m_n - n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_1 \Rightarrow m_n - n \geqslant n_0$, et pour un tel n

$$0 \leqslant B_{m_n} - B_{m_n-n} = \sum_{k=\lfloor n\ln n - n\rfloor+1}^{\lfloor n \ln n\rfloor} b_k \leqslant 2C \sum_{k=\lfloor n\ln n\rfloor - n+1}^{\lfloor n \ln n\rfloor} \frac{1}{k} \leqslant \frac{2C}{\lfloor n \ln n\rfloor - n + 1} \sum_{k=\lfloor n\ln n\rfloor - n+1}^{\lfloor n \ln n\rfloor} 1 = \frac{2Cn}{\lfloor n \ln n\rfloor - n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2Cn}{n \ln n} = \frac{2C}{\ln n}$$

et le majorant tend vers 0. Par encadrement, on en déduit bien que $B_{m_n} - B_{m_n-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En recollant tous les morceaux, on a bien

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{B_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{C \ln(n)}.$$

19. Soit $D = \max\{k \in [\![0,n]\!]\,,\ S_k = 0_d\}$. L'ensemble $\{k \in [\![0,n]\!]\,,\ S_k = 0_d\}$ est non vide puisque $S_0 = 0_d$, de sorte que D est bien définie, et est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ en tant que fonction de $(X_1,\dots,X_n)$. Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, on a

$$\{D = k\} = \{S_k = 0_d \,;\, S_{k+1} \neq 0 \,;\, \dots \,;\, S_n \neq 0\} = \{S_k = 0_d \,;\, S_{k+1} - S_k \neq 0 \,;\, \dots \,;\, S_n - S_k \neq 0\}.$$

Comme $S_{k+1} - S_k$, ..., $S_n - S_k$ sont des fonctions de $(X_{k+1},\dots,X_n)$, elles sont indépendantes de S_k (fonction de $(X_1,\dots,X_k)$) par le lemme des coalitions, de sorte que

$$P(D = k) = P(S_k = 0_d \,;\, S_{k+1} - S_k \neq 0 \,;\, \dots \,;\, S_n - S_k \neq 0) = P(S_k = 0_d)P(S_{k+1} - S_k \neq 0 \,;\, \dots \,;\, S_n - S_k \neq 0).$$

Comme vu à la question 11, $(S_{k+1}-S_k,\dots,S_n-S_k)$ a même loi que $(S_1,\dots,S_{n-k})$, si bien que

$$P(D=k)=P(S_k=0_d)P(S_1\neq 0\,;\,\dots\,;\,S_{n-k}\neq 0)=P(S_k=0_d)P(R>n-k).$$

Il en découle bien (la loi de D étant une probabilité sur $[\![0,n]\!]$)

$$1=\sum_{k=0}^{n}P(D=k)=\sum_{k=0}^{n}P(S_k=0_d)P(R>n-k).$$

Preuve analytique moche mais un peu plus immédiatement visible. La fonction H définie comme somme de la série entière $\sum P(R>n)x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, par le même argument que F et G. En outre, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $R>n$ si $R=+\infty$ ou $R=k$ pour $k>n$. On a alors pour tout $x\in[0,1[$

$$H(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(R>n)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}P(R=k)\right)x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}P(R=+\infty)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}P(R=k)\right)x^n+\frac{1-G(1)}{1-x}.$$

La convergence de $\sum P(R\geqslant n)x^n$ montre la sommabilité de la famille de réels positifs $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ définie par $u_{n,k}=P(R=k)x^n$ si $k\geqslant n+1$ et $u_{n,k}=0$ sinon par le théorème de sommation par paquets. On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}P(R=k)\right)x^n=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k-1}P(R=k)x^n=\sum_{k=1}^{+\infty}P(R=k)\frac{1-x^k}{1-x}=\frac{1}{1-x}\sum_{k=1}^{+\infty}P(R=k)-\frac{1}{1-x}\sum_{k=1}^{+\infty}P(R=k)x^k=\frac{G(1)-G(x)}{1-x}$$

où la convergence de ces deux dernières séries est donc assurée (on a reconnu la série entière définissant G). Il vient

$$H(x)=\frac{1-G(x)}{1-x}$$

et compte tenu de la question 8

$$F(x)H(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n.$$

Or, par produit de Cauchy, on a pour tout $x\in[0,1[$

$$F(x)H(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}P(S_k=0_d)P(R>n-k)\right)x^n$$

et par unicité du développement en série entière, on obtient bien

$$1=\sum_{k=0}^{n}P(S_k=0_d)P(R>n-k).$$

20. On raisonne comme en 13 : $S_{2n}=0_2$ signifie que l'on peut découper les $2n$ sauts de la marche aléatoire en quatre paquets de tailles respectives k, k, $n-k$ et $n-k$, contenant respectivement les sauts vers le haut, vers le bas, vers la gauche et vers la droite, ceux-ci pouvant se produire dans n'importe quel ordre. Chacune des trajectoires correspondantes a la même probabilité $\frac{1}{4^{2n}}$ d'advenir, et il suffit donc de dénombrer ces trajectoires.

– On choisit d'abord les k instants des sauts vers le haut : $\binom{2n}{k}$ choix.

– On choisit les k instants des sauts vers le bas dans les $2n-k$ restants : $\binom{2n-k}{k}$ choix;

– On choisit enfin les $n-k$ instants des sauts vers la gauche dans les $2n-2k$ restants : $\binom{2n-2k}{n-k}$ choix.

Les $n-k$ instants restants correspondent alors à des sauts vers la droite. Le nombre de trajectoires revenant en 0 au bout de $2n$ sauts en effectuant $2k$ sauts verticaux et $2n-2k$ sauts horizontaux est donc

$$\binom{2n}{k}\binom{2n-k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=\frac{(2n)!(2n-k)!(2n-2k)!}{k!(2n-k)!k!(2n-2k)!(n-k)!^2}=\frac{(2n)!}{k!^2(n-k)!^2}=\frac{(2n)!}{n!^2}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}\binom{n}{k}^2.$$

L'ensemble total des trajectoires revenant en 0 au bout de $2n$ sauts est partitionné selon la valeur de k, et il vaut donc avec la question 1

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}^2.$$

Il vient bien

$$P(S_{2n}=0_2)=\left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2.$$

Autre raisonnement : l'astuce du « huitième de tour ». Au lieu de sauter horizontalement et verticalement, on saute en diagonale ! En pratique, cela revient à modifier le processus de la façon suivante : on considère Y de loi donnée par la distribution

$$P(Y=(1,1)) = P(Y=(-1,-1)) = P(Y=(1,-1)) = P(Y=(-1,1)) = \frac{1}{4}$$

puis une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que Y, et enfin $T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$: il s'agit, comme annoncé, de la même marche aléatoire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mais où les sauts s'effectuent en diagonale. En clair, on fait tourner S_n d'un huitième de tour dans le sens des aiguilles d'une montre (et on multiplie toutes les distances par $\sqrt{2}$, par pure coquetterie, pour rester sur les points entiers). De façon immédiate, on a alors $P(S_{2n}=0_2) = P(T_{2n}=0_2)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En notant (C_1, C_2) les coordonnées de Y, un calcul direct et élémentaire montre que C_1 et C_2 sont indépendantes, de même loi définie par $P(C_1=1) = P(C_1=-1) = \dfrac{1}{2}$. En notant (U_n, V_n) les coordonnées de T_n, on en déduit que (contrairement à la situation d'origine) U_n et V_n sont indépendantes (lemme des coalitions), et donc que

$$P(T_{2n}=0_2) = P(U_{2n}=0\,;\ V_{2n}=0) = P(U_{2n}=0)P(V_{2n}=0).$$

U et V sont deux marches aléatoires de même loi, et de même loi que celle étudiée dans la partie C. Le calcul qu'on a effectué à ce moment-là fournit donc bien

$$P(T_{2n}=0) = P(U_{2n}=0)^2 = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2.$$

21. On a donc

$$P(S_{2n}=0_2) = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n}$$

avec la question 2. En éliminant les valeurs impaires de la somme qui sont nulles, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{2n} P(S_k=0_d)P(R>2n-k) = \sum_{k=0}^{n} P(S_{2k}=0_d)P(R>2n-2k) = 1$$

ce qui autorise à appliquer le résultat de la question 18 (toutes les probabilités restant dans cette somme sont strictement positives et $(P(R>2n))_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement décroissante) et on obtient

$$P(R>2n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\ln n}.$$

Comme $P(R>2n+1) = P(R>2n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ puisque $P(R=2n+1)=0$, on a de même

$$P(R>2n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\ln n}$$

et donc

$$P(R>n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\ln\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi}{\ln n - \ln 2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\ln n}.$$

Avec la question 12, on obtient

$$E(N_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln n}.$$

Par comparaison série-intégrale et en utilisant le résultat de la question 4, on obtient $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_2^n \frac{\mathrm{d}x}{\ln x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln n}$ puis enfin

$$E(N_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi n}{\ln n}.$$