Devoir Surveillé n° 6 sujet 1.
le 31 janvier.

Exercice 1

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X = n)$, la fonction génératrice de X est $G_X(t) = E\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

Q1. Démontrer que l'intervalle $]-1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction G_X.
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On pose $S = X_1 + X_2$, démontrer que pour tout $t \in]-1, 1[, G_S(t) = G_{X_1}(t) \cdot G_{X_2}(t)$ par deux méthodes : l'une utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières et l'autre utilisant uniquement la définition : $G_X(t) = E\left(t^X\right)$.
On généralise ce résultat, que l'on pourra utiliser dans la question suivante, à n variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ (on ne demande pas de preuve de cette récurrence).

Q2. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2 .
On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés.
Déterminer pour tout $t \in]-1, 1[, G_{S_n}(t)$ et en déduire la loi de S_n.

Problème

Notations

- Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}, p$ désigne un entier supérieur ou égal à 2 . On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- On note I_p la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
- Si $x = (x_1, \ldots, x_p)$ est un vecteur de $\mathbb{K}^p$, on note $\|x\|_\infty$ sa norme «infinie» définie par :

$$\|x\|_\infty = \max\left\{|x_i| \mid \quad i \in [\![1, p]\!]\right\}.$$

- On dit que x est un vecteur stochastique si ses coordonnées sont positives ou nulles et leur somme vaut 1 :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], x_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} x_i = 1$$

- Une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chacune de ses lignes vaut 1 , c'est-à-dire si :

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, a_{i,j} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, p]\!], \quad \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = 1.$$

- Une matrice A est dite strictement positive si tous ses coefficients sont strictement positifs. On note alors $A > 0$.
- Si $b_1, b_2, \ldots, b_k$ sont des nombres complexes (respectivement des matrices carrées), on note $\operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ la matrice diagonale (respectivement diagonale par blocs) dont les coefficients diagonaux (respectivement blocs diagonaux) sont $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

Objectifs

Le sujet est constitué d'un seul problème qui traite de matrices stochastiques dans un contexte probabiliste de chaîne de Markov (partie I). On étudie le spectre d'une matrice stochastique A (partie II) et la suite des itérés de A (partie III). On introduit aussi la notion de probabilité invariante par A (partie IV), suivie de son calcul effectif par ordinateur (partie V). La partie I est indépendante des autres parties. La partie IV utilise les deux résultats démontrés dans les parties II et III. La partie V est une partie informatique liée à la partie IV, mais qui peut être traitée de manière indépendante *(partie supprimée)*.

Partie I - Un exemple de chaîne de Markov

Une particule possède deux états possibles numérotés 1 et 2 et peut passer de son état à l'état 1 ou 2 de façon aléatoire. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_n égale à l'état de la particule au temps n. L'état de la particule au temps $n+1$ dépend uniquement de son état au temps n selon les règles suivantes :

- si au temps n la particule est dans l'état 1 , au temps $n+1$ elle passe à l'état 2 avec une probabilité $\frac{1}{2}$.
- si au temps n la particule est dans l'état 2 , au temps $n+1$, elle passe à l'état 1 avec une probabilité $\frac{1}{4}$.

On suppose que $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$.

Q3. Déterminer en justifiant la loi de X_1.
On pose $\mu_n = (P(X_n = 1), P(X_n = 2))$ le vecteur ligne de $\mathbb{R}^2$ caractérisant la loi de X_n.

Q4. Justifier la relation matricielle suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mu_{n+1} = \mu_n A \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Q5. En déduire, à l'aide de la calculatrice, la loi de X_5 (on demande les résultats arrondis au centième).

Q6. Temps de premier accès à l'état 1 : on note T la variable aléatoire égale au plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = 1$. Déterminer $P(T = 1)$, puis $P(T = k)$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

Q7. Justifier que A est diagonalisable, puis donner, sans détailler les calculs, une matrice Q inversible à coefficients entiers telle que

$$A = Q \operatorname{diag}\left(1, \frac{1}{4}\right) Q^{-1}$$

Q8. Justifier que les applications $M \mapsto QMQ^{-1}$ et $M \mapsto \mu_0 M$ définies sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont continues.

Q9. En déduire la convergence de la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis de la suite de vecteurs lignes $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Préciser les coefficients du vecteur ligne obtenu comme limite.

La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un cas particulier de variables aléatoires dont l'état à l'instant $n+1$ ne dépend que de son état à l'instant n et pas des précédents. On dit alors que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Plus généralement si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov prenant ses valeurs dans $[\![1,p]\!]$, la loi des variables X_n est entièrement déterminée par la donnée de la loi de X_0 et d'une matrice stochastique A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Si on pose maintenant $\mu_n = (P(X_n=1), P(X_n=2), \ldots, P(X_n=p))$, l'étude du comportement de la loi de X_n lorsque n est grand, se ramène alors à l'étude de la convergence de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $\mu_{n+1} = \mu_n A$. Cela conduit à l'étude de la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est l'objet des parties suivantes.

Partie II - Spectre d'une matrice stochastique

Soit A une matrice stochastique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Q10. Justifier que 1 est valeur propre de A (on pourra considérer le vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$ dont toutes les coordonnées valent 1).

Q11. Soit x un vecteur colonne de $\mathbb{C}^p$. Démontrer que $\|Ax\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty$.

Q12. En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

Localisation des valeurs propres

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A.

Q13. Justifier l'existence d'un vecteur colonne $x = (x_1, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{C}^p$ tel que $\|x\|_\infty = 1$ et $Ax = \lambda x$.

Q14. Soit $i \in [\![1,p]\!]$ tel que $|x_i| = 1$. Démontrer que :

$$|\lambda - a_{i,i}| \leqslant 1 - a_{i,i}.$$

Étude d'un exemple

Q15. Dans cette question uniquement, on prend :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Déduire de la question précédente que les valeurs propres de A sont contenues dans la réunion de trois disques, que l'on représentera en précisant leurs centres et leurs rayons.

On constate en particulier sur l'exemple que 1 est la seule valeur propre de A de module 1 . On admettra, dans la suite du problème, que cette propriété reste vraie pour toute matrice stochastique strictement positive.

Cas des matrices stochastiques strictement positives

Q16. On suppose en plus pour cette question et la question suivante que la matrice A est strictement positive. On pose $B = A - I_p$ et on note B' la matrice de $\mathcal{M}_{p-1}(\mathbb{R})$ obtenue en supprimant la dernière colonne et la dernière ligne de B.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de B'.

On admet qu'il existe un entier $i \in [\![1,p-1]\!]$ tel que :

$$|\lambda - (a_{i,i} - 1)| \leqslant 1 - a_{i,i} - a_{i,p}.$$

La démonstration (non demandée) de cette inégalité est similiaire à celle de la question **Q14**.

Déduire de cette inégalité que B' est inversible.

Q17. En déduire que $\dim \operatorname{Ker}(A - I_p) = 1$.

On admet sans démonstration que 1 est racine simple du polynôme caractéristique de A. On dit alors que 1 est une valeur propre simple de A. Nous pouvons résumer les résultats de cette partie par la Proposition 1 ci-dessous.

Proposition 1. Soit A une matrice stochastique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ strictement positive. Alors 1 est valeur propre simple et les autres valeurs propres ont un module strictement inférieur à 1 .

Partie III - Itérées d'une matrice stochastique

On démontre dans cette partie la proposition suivante :

Proposition 2. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, stochastique et strictement positive, la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Un contre-exemple

Q18. On considère s la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. Donner, sans justification, la matrice B de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Q19. La Proposition 2 reste-t-elle vraie si la matrice stochastique n'est pas strictement positive ?

Résultat préliminaire

Soit λ un nombre complexe avec $|\lambda| < 1$ et N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Q20. Démontrer que $N^p = 0$.

Q21. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier que pour n au voisinage de $+\infty$, $\binom{n}{k}$ est équivalent à $\frac{n^k}{k!}$. En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\binom{n}{k}\lambda^{n-k}$.

Q22. En déduire que la suite de matrices $\left((\lambda I_p + N)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Convergence d'une suite de matrices

Soit A une matrice stochastique et strictement positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On sait, d'après la Proposition 1, que 1 est valeur propre simple de A. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les autres valeurs propres complexes de A, un théorème du cours montre que A est semblable sur $\mathbb{C}$ à une matrice diagonale par blocs du type

$$\operatorname{diag}(1, \lambda_1 I_{p_1} + N_1, \ldots, \lambda_r I_{p_r} + N_r)$$

avec $p_1, \ldots, p_r$ des entiers et $N_1, \ldots, N_r$ des matrices nilpotentes à coefficients complexes.

Q23. Déduire des questions **Q20** à **Q22** que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Partie IV - Probabilité invariante par une matrice stochastique

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. On dit que A admet une probabilité invariante s'il existe un vecteur ligne stochastique $\mu \in \mathbb{R}^p$ tel que $\mu A = \mu$ (on dit alors que μ est une probabilité invariante par A).
Le but de cette partie est de démontrer la propriété énoncée dans la Proposition 3 ci-dessous.
Proposition 3. Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique strictement positive et $\mu_0 \in \mathbb{R}^p$ un vecteur ligne stochastique. On note $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de vecteurs lignes de $\mathbb{R}^p$ définie par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_{n+1} = \mu_n$ A. Alors, la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur stochastique μ_∞ vérifiant $\mu_\infty = \mu_\infty A$. De plus, le vecteur μ_∞ est l'unique probabilité invariante par A (il ne dépend donc pas du choix de μ_0).

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique strictement positive et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie ci-dessus.

Q24. Démontrer que l'ensemble des vecteurs stochastiques de $\mathbb{R}^n$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.

Convergence de la suite

Q25. Démontrer que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur μ_∞ vérifiant $\mu_\infty = \mu_\infty A$.

Q26. Soit $\mu = (m_1, \ldots, m_p)$ un vecteur ligne stochastique. Démontrer que μA est encore un vecteur stochastique.

Q27. En déduire que μ_∞ est une probabilité invariante par A.

Unicité de la probabilité invariante

Q28. Lien avec le spectre de la transposée de A : soit $\mu \in \mathbb{R}^p$ un vecteur ligne stochastique. Justifier que μ est une probabilité invariante pour A, si et seulement si le vecteur colonne $\mu^\top$ est un vecteur propre de $A^\top$ associé à la valeur propre 1.

Q29. Justifier, en utilisant la question **Q17**, que $\dim \operatorname{Ker}\left(A^\top - I_p\right) = 1$.

Q30. En déduire que A admet une unique probabilité invariante.